Cours de Mathématiques

Sup 3 – Tome I

F. Fayard

22 août 2024

La version de ce document est la 249ad1f.

Merci à tous les élèves des lycées Janson de Sailly, du Parc et des Lazaristes pour leurs remarques et corrections. Je remercie particulièrement Younès Achbad, Samuel Auroy, Antonin Aye, Antonin Barbier, Amin Belfkira, Martin Bot, Alexandre Brousse, Élodie Brun, Damien Callendrier, Lauren Calvosa, Sylvain Crosnier, Aël De La Rosa-Leridon, Enguerrand De Jaegere, Thibaud De Valicourt, Victor Déru, Raphaël Des Boscs, Grégoire Dhimoïla, Léo Duhamel-Callot, Mehdi El Khalfioui, Sacha Evrard, Axel Faou, Titouan Francheteau, Anthony Gago-Klimenko, Hélène Ghaleb, Cédric Holocher, Maxime Joubert, Paul-Antonin Larrieu, Maxime Lombard, Mira Maamri, Raphaël Martin, Cyprien Mas, Gauthier Malandrin, Alexandre Mazet, Gabriel Moreau, Pierre-Antoine Nguyen, Ulysse Nicolle, Baptiste Odouard, Hilaire Oudinot, Maëlyne Porté, Eliott Pradeleix, Corentin Prizzon, Yann-Ellie Ravon, Sixtine Reynaud, Romain Roche, Vivien Thienot, Carole Vacherand, Enzo Vandenbroucke, Camille Vialet, Paul Vilars, Antonin Villepontoux et Tanguy Vuillefroy De Silly.

Je tiens enfin à remercier mes anciens professeurs et collègues qui ont eu une influence sur la rédaction de ce document : Walter Appel, Bruno Arsac, Jean-Pierre Barani, Vincent Bayle, Christophe Bertault, Laurence Bouyge, Gilles Chaffard, Alain Chillès, Denis Choimet, Vincent Clapiès, Gérard Esposito, Stéphane Gonnord, Victor Lambert, Frédéric Morlot, Franz Ridde, Emmanuel Roblet et Alain Troesch.

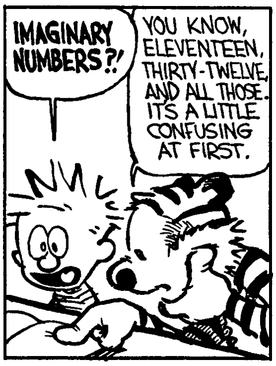
Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

« La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire. »

— Jacques Hadamard (1865–1963)



1.1 Le corps des nombres complexes

1.1.1 Définition, conjugaison, module

Le carré de tout nombre réel étant positif, l'équation

$$x^2 = -1$$

n'admet aucune solution réelle. Nous admettrons qu'il existe un ensemble de nombres A ayant les propriétés suivantes.

— $\mathbb{R} \subset A$.
— On peut additionner, soustraire et multiplier les éléments de A en utilisant les règles usuelles de l'algèbre.
— L'équation $z^2 = -1$ admet au moins une solution dans A.

On note i une solution de cette équation.

Définition 1.1.1

On appelle corps des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres $x + \mathrm{i}y$ où x et y sont réels.

Remarques

⇨ $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, tout nombre réel est un nombre complexe.

⇨ $\mathbb{C}$ est stable par les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication.

Définition 1.1.2

Pour tout nombre complexe z, il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $z = x + \mathrm{i}y$. Les réels x et y sont respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* de z. On note

$$\mathrm{Re}(z) := x \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) := y$$

et on a donc $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

Remarques

⇨ On appelle *forme cartésienne* de $z \in \mathbb{C}$, toute écriture de la forme $z = x + \mathrm{i}y$ où $x, y \in \mathbb{R}$. La proposition précédente affirme que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, une telle écriture existe et est unique.

⇨ Si $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2,$$

alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. On dit souvent qu'on procède par *identification*, mais cette terminologie est abusive. On utilise en fait l'unicité de la proposition précédente.

⇨ Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct du plan. À tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, on associe le point M dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont (x, y). On a donc

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$

et on dit que M a pour affixe z. Pout tout point M du plan, il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que M a pour affixe z ; on dit alors que z est *l'affixe* du point M. On a ainsi identifié $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des points du plan.

⇨ Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. On dit qu'un nombre complexe est *imaginaire pur* lorsque sa partie réelle est nulle. L'ensemble des nombres imaginaires purs est donc

$$\mathrm{i}\mathbb{R} := \{\mathrm{i}y : y \in \mathbb{R}\}.$$

⇨ De même qu'on ne peut pas écrire d'inégalités entre les points du plan, les inégalités entre nombres complexes n'ont aucun sens.

Proposition 1.1.3

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

Proposition 1.1.4

Soit z et z' deux nombres complexes, λ et μ deux réels. Alors
— $\mathrm{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathrm{Re}(z) + \mu\,\mathrm{Re}(z')$,
— $\mathrm{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathrm{Im}(z) + \mu\,\mathrm{Im}(z')$.

Remarque

⇨ Attention, l'identité $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ est fausse. Par exemple $\mathrm{Re}(\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}) = -1$ et $\mathrm{Re}(\mathrm{i})\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}) = 0$.

Définition 1.1.5

Soit z un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe

$$\overline{z} := x - \mathrm{i}y$$

où x et y sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z.

Remarque

⇨ Si M est le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, le point M' d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox).

Proposition 1.1.6

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}', \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z}', \quad \text{et} \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Définition 1.1.7

Soit z un nombre complexe. On appelle *module* de z et on note $|z|$ le nombre réel positif

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

où x et y sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z.

Remarques

⇨ Si $x \in \mathbb{R}$, son module est égal à sa valeur absolue.

⇨ Si M est le point d'affixe z, le module de z est la distance OM. Si A et B sont deux points d'affixes respectives a et b, alors $AB = |b - a|$.

⇨ Si $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ est le *cercle* de centre a et de rayon r.
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r\}$ est le *disque fermé* de centre a et de rayon r.
- $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est le *disque ouvert* de centre a et de rayon r.

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels qu'au moins l'un des deux réels a, b est non nul. Alors, l'ensemble d'équation

$$ax + by + c = 0$$

est une droite orthogonale au vecteur de coordonnées (a, b).

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble d'équation

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

est soit un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.

Définition 1.1.8

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque

⇨ L'identification entre $\mathbb{C}$ et le plan complexe nous amène à identifier $\mathbb{U}$ avec le cercle de centre O et de rayon 1, appelé *cercle trigonométrique*.

Proposition 1.1.9

Soit z un nombre complexe. Alors

$$|z|^2 = z\overline{z}.$$

De plus, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Remarque

⇨ Afin d'exploiter cette identité, on cherchera souvent à travailler avec le carré des modules.

Proposition 1.1.10

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$|zz'| = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad |\overline{z}| = |z|\,.$$

Proposition 1.1.11

Si z et z' sont deux nombres complexes tels que $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$. On dit que $\mathbb{C}$ est *intègre*.

Proposition 1.1.12

Soit z un nombre complexe non nul. Alors il existe un unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$. On note ce nombre z^{-1} ou $1/z$. De plus
$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Remarques

⇨ Pour obtenir $1/z$ sous forme cartésienne, il suffit de multiplier son numérateur et son dénominateur par $\overline{z}$.

⇨ Si $z \in \mathbb{U}$, alors $1/z = \overline{z}$. Pour inverser un nombre complexe de module 1, il suffit donc de le conjuguer.

Exercice 1

⇨ Calculer l'inverse de $1 + \mathrm{i}$.

Proposition 1.1.13

Soit z un nombre complexe non nul. Alors
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

Exercice 2

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer que
$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1.$$

Proposition 1.1.14

Soit z un nombre complexe. Alors
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

En particulier
- z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Remarque

⇨ En pratique, pour montrer qu'un nombre complexe est réel, une bonne méthode est de montrer qu'il est égal à son conjugué. La méthode consistant à montrer que sa partie imaginaire est nulle est à proscrire.

Exercices 3

⇨ Soit a et b deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$. Montrer que
$$\frac{a+b}{1+ab}$$
est un nombre réel.

⇨ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ pour que
$$\frac{z+2}{1+\mathrm{i}z}$$
soit réel.

1.1.2 Inégalité triangulaire

Proposition 1.1.15

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors
$$\mathrm{Re}(a) \leqslant |\mathrm{Re}(a)| \leqslant |a| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(a) \leqslant |\mathrm{Im}(a)| \leqslant |a|.$$
De plus, $\mathrm{Re}(a) = |a|$ si et seulement si a est réel positif.

Proposition 1.1.16: Inégalité triangulaire

Soit a et b deux nombres complexes. Alors
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$
De plus, l'égalité a lieu si et seulement si a et b sont positivement liés, c'est-à-dire lorsque $a = 0$ ou lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $b = \lambda a$.

Remarques

⇨ Si (ABC) est un triangle, alors $AC \leqslant AB + BC$. En effet, si on note a, b, c les affixes respectives de A, B, C
$$AC = |c-a| = |c-b+b-a| \leqslant |c-b| + |b-a| = BC + AB.$$
Cette inégalité explique le nom d'inégalité triangulaire donné à la proposition précédente.

⇨ Attention, il est possible que a et b soient positivement liés sans qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $b = \lambda a$.

Proposition 1.1.17: Seconde inégalité triangulaire

Soit a et b deux nombres complexes. Alors
$$||a| - |b|| \leqslant |a+b|.$$

Remarque

⇨ La seconde inégalité triangulaire admet plusieurs variantes.
- Si on remplace b par $-b$, on obtient l'inégalité
$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|$$
qui affirme que deux nombres complexes proches ont des modules proches.
- En remarquant que si x est réel, $|x| \geqslant x$, on obtient
$$|a+b| \geqslant |a| - |b|.$$
Cette inégalité affirme que si b a un module petit par rapport à celui de a, alors $a+b$ est éloigné de 0.

Exercices 4

⇨ Soit a et b deux nombres complexes distincts. On pose $\delta := |a-b|$. Montrer que les disques ouverts de centre a et b et de rayon $\delta/2$ sont disjoints.

⇨ Que peut-on dire de $|z|$ si $|1-z| \leqslant 1/4$? Faire un dessin puis une preuve.

Proposition 1.1.18

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

1.1.3 Puissance entière, binôme de Newton

Définition 1.1.19

Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit a^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ en posant
- $a^0 := 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{n+1} := a^n a$.

Remarque

⇨ En particulier, $0^0 = 1$.

Proposition 1.1.20

Soit a, b deux nombres complexes, n et m deux entiers naturels. Alors

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^{n+m} = a^n a^m \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Proposition 1.1.21

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\overline{a^n} = \overline{a}^n \quad \text{et} \quad |a^n| = |a|^n .$$

Exercice 5

⇨ Montrer que si $P(z) := a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ est un polynôme à coefficients réels, l'ensemble de ses racines est stable par conjugaison.

Définition 1.1.22

Soit a un nombre complexe non nul. On étend la définition de a^n à $n \in \mathbb{Z}$ en posant

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}$$

lorsque $n < 0$.

Proposition 1.1.23

Soit a, b deux nombres complexes non nuls, n et m deux entiers relatifs. Alors

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^{n+m} = a^n a^m \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

Proposition 1.1.24

Soit a un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\overline{a^n} = \overline{a}^n \quad \text{et} \quad |a^n| = |a|^n .$$

Définition 1.1.25: Division euclidienne

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$a = qb + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b.$$

q est appelé *quotient* de la division euclidienne de a par b, r son *reste*.

Exercice 6

⇨ On pose $\mathrm{j} := -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^3, puis en déduire j^{2023}.

Définition 1.1.26

Pour tout entier naturel n, on définit la *factorielle* de n que l'on note $n!$ par
- $0! := 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! := (n+1)\, n!$.

Remarque

⇨ Si $n \in \mathbb{N}^*$
$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Définition 1.1.27

Pour tout couple (k, n) d'entiers naturels, on définit $\binom{n}{k}$ que l'on prononce « k parmi n », comme étant le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarques

⇨ Si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Proposition 1.1.28

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Proposition 1.1.29: Relation de Pascal

Soit k et n deux entiers naturels. Alors
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Remarque

⇨ Cette formule est appelée relation de Pascal. Elle permet de calculer efficacement les $\binom{n}{k}$ en construisant le triangle de Pascal. Dans ce tableau contenant les $\binom{n}{k}$, où n désigne la ligne et k désigne la colonne, on commence par placer une colonne de 1 indiquant le fait que $\binom{n}{0} = 1$, puis une diagonale de 1 indiquant le fait que $\binom{n}{n} = 1$. Les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls et ne sont généralement pas représentés. Ceux en dessous de la diagonale sont complétés, ligne après ligne en utilisant la relation de Pascal qui affirme que chaque coefficient est la somme du coefficient se situant au-dessus de lui et de celui au-dessus à gauche.

$$\begin{array}{cccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Ce triangle permet par exemple de lire sur la dernière ligne que $\binom{5}{1} = 5$ et $\binom{5}{2} = 10$.

Proposition 1.1.30

Soit n un entier naturel et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Remarques

⇨ On peut simplifier l'écriture de $\binom{n}{k}$ en
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\cdots(n-(k-1))}^{k \text{ termes}}}{k!}.$$

En particulier
$$\binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

⇨ Si $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a la formule dite « du capitaine »

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 7

⇨ Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}.$$

Proposition 1.1.31: Binôme de Newton

Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Exercice 8

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Proposition 1.1.32

Soit a et b deux nombres complexes. Alors

— $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

— Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right). \end{aligned}$$

Proposition 1.1.33

Soit a un nombre complexe et n un entier naturel. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

1.2 Forme trigonométrique

1.2.1 Exponentielle iθ

Définition 1.2.1

Pour tout réel θ, on définit l'exponentielle de iθ par

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Proposition 1.2.2

Soit θ_1 et θ_2 deux réels. Alors

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$

Proposition 1.2.3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$
De plus, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est non nul et si $n \in \mathbb{Z}$, alors
$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n.$$

Proposition 1.2.4: Formules d'Euler et Moivre

Soit θ un réel. Alors les formules d'Euler s'écrivent
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$
Pour $n \in \mathbb{Z}$, la formule de Moivre nous donne
$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n.$$

Proposition 1.2.5

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$ si et seulement si $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$.
- Plus précisément, étant donnés θ_1 et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ si et seulement si $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$.

Exercice 9

⇨ Déterminer la partie réelle de
$$\frac{1}{1 - \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}.$$

Proposition 1.2.6: Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par « l'exponentielle $\mathrm{i}\theta$ »

L'application qui à θ associe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Autrement dit :
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}$.
- Pour tout $u \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

1.2.2 Application à la trigonométrie

Applications

⇨ *Factorisation par l'arc moitié*
Étant donné un réel θ
$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$
De même
$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$
Plus généralement, étant donnés $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

⇨ *Calcul de sommes trigonométriques*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$C_n := \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

⇨ *Linéarisation de* $\cos^n\theta \sin^m\theta$
Étant donné deux entiers naturels n et m, on cherche à exprimer $\cos^n\theta \sin^m\theta$ comme combinaison linéaire des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, on peut utiliser les formules d'Euler avant de développer l'expression par la formule du binôme de Newton et de regrouper les termes en utilisant à nouveau les formules d'Euler. Cette opération sera utile lors du calcul de primitives.
Exemple : Linéariser $\sin^6\theta$ et $\sin\theta\cos^4\theta$.

⇨ *Expression de* $\cos(n\theta)$ *et* $\sin(n\theta)$ *comme polynôme en* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$
Pour cette opération, une méthode consiste à utiliser la formule de Moivre avant de développer l'expression obtenue à l'aide du binôme de Newton.
Exemple : Exprimer $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$.

Exercices 10

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

⇨ En exprimant $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$, montrer que $\cos(\pi/10)$ est racine d'un polynôme à coefficients entiers. En déduire une expression de $\cos(\pi/10)$ à l'aide de radicaux.

1.2.3 Forme trigonométrique

Définition 1.2.7

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *forme trigonométrique* de z toute écriture

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarques

⇨ Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une forme trigonométrique, alors $r = |z|$.

⇨ Tout nombre complexe non nul admet une forme trigonométrique. En pratique, pour la déterminer, on force la factorisation de z par $|z|$ et on écrit le second terme sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

⇨ Il existe deux moyens de représenter un même nombre complexe : la forme cartésienne et la forme trigonométrique. La première est particulièrement adaptée aux calculs de sommes, tandis que la seconde est particulièrement adaptée aux calculs de produits.

Exercices 11

⇨ Mettre $-2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.

⇨ Mettre sous forme trigonométrique

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}.$$

Définition 1.2.8

On appelle *argument* de $z \in \mathbb{C}^*$ tout réel θ tel que

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

Proposition 1.2.9

Tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$ admet au moins un argument. Si θ est l'un de ses arguments, l'ensemble de ses arguments est $\theta + 2\pi\mathbb{Z} := \{\theta + k2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. On écrit

$$\arg(z) \equiv \theta \quad [2\pi].$$

Remarques

⇨ Soit $r_1, r_2 > 0$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Alors

$$r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$$

si et seulement si $r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$. Contrairement à la forme cartésienne, il n'y a donc pas unicité de la forme trigonométrique.

⇨ Si z est un nombre complexe non nul, il existe un unique $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ tel que $\arg z \equiv \theta \ [2\pi]$. On dit que θ est l'*argument principal* de z et on le note $\mathrm{Arg}(z)$.

⇨ Étant donné un nombre complexe z, on appelle *forme trigonométrique généralisée* de z toute écriture du type $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Attention, même si $z \neq 0$, on n'a pas nécessairement $\arg z \equiv \theta \ \ [2\pi]$. En effet :
— Si $\rho > 0$, alors $\rho = |z|$ et $\arg z \equiv \theta \ \ [2\pi]$.
— Si $\rho < 0$, alors $\rho = -|z|$ et $\arg z \equiv \theta + \pi \ \ [2\pi]$.
Lorsque l'énoncé demandera explicitement de mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique, c'est bien sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ qu'il faudra le mettre. Cependant, lorsqu'on demandera de mettre z sous forme trigonométrique pour conduire des calculs, une forme trigonométrique généralisée suffira le plus souvent.

Exercices 12

⇨ Résoudre l'équation

$$z^2 = \overline{z}$$

en utilisant la forme cartésienne, puis la forme trigonométrique de z.

⇨ Résoudre l'équation $z^5 = 1/\overline{z}$.

Proposition 1.2.10

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ \ [2\pi], \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ \ [2\pi],$$

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \ \ [2\pi], \qquad \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ \ [2\pi].$$

Remarque

⇨ En général, $\mathrm{Arg}(zz') \neq \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$. Par exemple $\mathrm{Arg}((-1)(-1)) = 0$ et $\mathrm{Arg}(-1) + \mathrm{Arg}(-1) = 2\pi$.

1.2.4 Exponentielle complexe

Définition 1.2.11

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où x et y sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z. On appelle exponentielle de z et on note e^z le nombre complexe défini par

$$e^z := e^x (\cos y + i \sin y).$$

Proposition 1.2.12

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors

$$e^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad e^{z+z'} = e^z e^{z'}.$$

Proposition 1.2.13

Soit z un nombre complexe, et $n \in \mathbb{Z}$. Alors e^z est non nul,

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z} \qquad \text{et} \qquad e^{nz} = (e^z)^n.$$

Proposition 1.2.14

Soit z un nombre complexe. Alors

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}, \qquad |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \qquad \text{et} \qquad \arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z) \ \ [2\pi].$$

Proposition 1.2.15

— Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\mathrm{e}^z = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \mathrm{i}k2\pi$.
— Plus précisément, étant donnés z_1 et z_2 deux nombres complexes, $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + \mathrm{i}k2\pi$.

Proposition 1.2.16

L'exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. Autrement dit :
— Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z \in \mathbb{C}^*$.
— Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^{z'} = z$.

Remarque

⇨ Si $z \in \mathbb{C}^*$, nous venons de voir qu'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $e^{z'} = z$. Cependant, z' n'est pas unique, ce qui nous empêche de définir le logarithme de z. Par contre, on peut montrer qu'il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^{z'} = z$ et $\mathrm{Im}(z') \in \left]-\pi, \pi\right]$. Ce nombre est appelé logarithme principal de z et noté $\mathrm{Ln}(z)$. De plus $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$. C'est le logarithme calculé par les logiciels de calcul formel ainsi que vos calculatrices. Malheureusement, l'identité $\mathrm{Ln}\,(zz') = \mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(z')$ est fausse ; elle n'est vraie que modulo $\mathrm{i}2\pi$. C'est pourquoi, nous n'emploierons jamais de logarithme avec les nombres complexes.

Exercice 13

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^z = \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

1.3 Racines d'un nombre complexe

1.3.1 L'équation du second degré

Définition 1.3.1

Soit a un nombre complexe. On appelle *racine* de a tout nombre complexe z tel que

$$z^2 = a.$$

Remarques

⇨ Si a est un réel positif, les racines de a sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Si a est un réel négatif, ses racines sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

⇨ Si $a \in \mathbb{C}$, on parlera de racine de a, mais on n'écrira jamais $\sqrt{a}$. Cette notation est réservée aux réels positifs.

Proposition 1.3.2

Soit a un nombre complexe non nul. Alors a admet exactement deux racines distinctes opposées l'une à l'autre.

Remarque

⇨ En pratique, pour trouver les racines d'un nombre complexe a, on procède ainsi
— *Si a s'exprime facilement sous forme trigonométrique.* On connait donc $r > 0$ et θ tels que $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Alors les racines de a sont $\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.
— *Si a est sous forme cartésienne et qu'il n'est pas simple de le mettre sous forme trigonométrique.* On recherche les racines de a sous la forme $z := x + \mathrm{i}y$ en effectuant une analyse : on suppose que z est une racine de a et on exploite le fait que $|z|^2 = |a|$ et que z^2 et a ont même partie réelle. On obtient donc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= |a|\,, \\ x^2 - y^2 &= \mathrm{Re}(a). \end{aligned}$$

En résolvant ce système linéaire en x^2 et y^2, on obtient 4 couples (x, y) de solutions parmi lesquelles se trouvent les racines de a. Un argument de signe sur les parties imaginaires de z^2 et a permet d'éliminer deux candidats. La proposition précédente nous assure que les deux candidats restants sont bien des racines de a.

Exercices 14

⇨ Calculer les racines carrées de $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

⇨ Calculer les racines de $1 + \mathrm{i}$ de deux manières différentes. En déduire une expression avec des radicaux emboîtés de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$ et $\tan(\pi/8)$.

Proposition 1.3.3

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0.$$

On appelle discriminant de (E) le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta \neq 0$, le trinôme admet deux racines distinctes

$$z_1 := \frac{-b+\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b-\delta}{2a}.$$

où δ est une racine carrée de Δ.

— Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une seule racine, appelée racine double

$$z_0 := -\frac{b}{2a}.$$

Remarque

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0.$$

— Si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$$z_1 := \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une seule racine réelle, appelée racine double

$$z_0 := -\frac{b}{2a}.$$

— Si $\Delta < 0$, le trinôme admet deux racines complexes conjuguées

$$z_1 := \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Exercice 15

⇨ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.

Proposition 1.3.4

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 deux nombres complexes. Alors z_1 et z_2 sont les deux racines, éventuellement égales, de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque

⇨ Si $P, S \in \mathbb{C}$, les solutions du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P, \end{cases}$$

sont (ω_1, ω_2) et (ω_2, ω_1) où ω_1 et ω_2 sont les racines du trinôme $z^2 - Sz + P = 0$.

Exercices 16

⇨ Déterminer les solutions de l'équation $3z^2 - 5z + 2 = 0$.

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 3 - 2\mathrm{i} \\ uv = 3 + \mathrm{i}. \end{cases}$$

1.3.2 Racines n-ièmes

Définition 1.3.5

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$, on appelle *racine n-ième* de a tout nombre complexe z tel que $z^n = a$. Les racines n-ièmes de 1 sont appelées *racines n-ièmes de l'unité* et l'ensemble de ces racines est noté $\mathbb{U}_n$.

Remarque

⇨ Les racines n-ièmes de 1 sont de module 1. Autrement dit, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

Proposition 1.3.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n-ièmes de l'unité. En posant $\omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, ce sont

$$1, \omega, \dots, \omega^{n-1}.$$

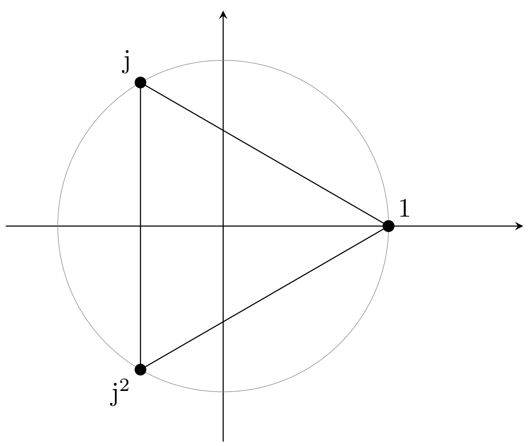
Remarques

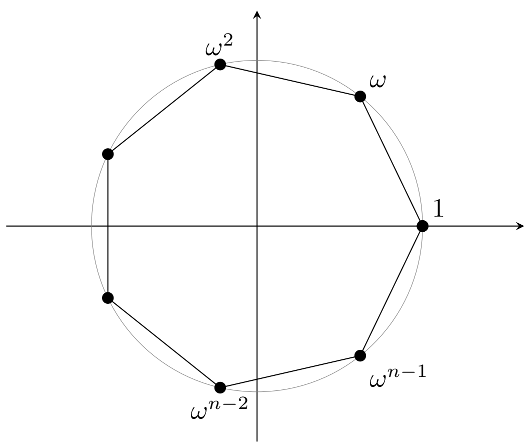
⇨ Lorsque l'on doit calculer sur des racines n-ièmes, il est souvent plus efficace de les manipuler via leur propriété $(z^n = 1)$ plutôt que par leur description $(z = \omega^k)$. On ne se rabat sur la description que lorsque la relation $z^n = 1$ ne suffit pas, ou en toute fin de calcul.

⇨ Dans le cas où $n = 3$, ω est noté j. Les racines 3-ièmes de l'unité sont donc $1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2$. Lorsqu'on travaille avec le nombre complexe j, on exploite les relations

$$\mathrm{j}^3 = 1, \qquad 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{j}} = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2.$$

⇨ Les racines n-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés.





Exercices 17

⇨ Que dire de deux nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a^3 = b^3$?

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z+1)^n = (z-1)^n.$$

⇨ Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|.$$

Proposition 1.3.7

Soit $n \geqslant 2$ et ζ une racine n-ième de l'unité, différente de 1. Alors

$$1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

En particulier, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Proposition 1.3.8

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors a admet exactement n racines n-ièmes. En posant $\omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, si z_0 est une racine n-ième de a, les racines n-ièmes de a sont

$$z_0, \omega z_0, \dots, \omega^{n-1} z_0.$$

Remarques

- Si $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est sous forme trigonométrique, alors
$$z_0 = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$$
est une racine n-ième de a.
- Si $n \geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe est nulle.

Exercices 18

- Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation
$$27\,(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0.$$
- En considérant les racines 7-ièmes de -1, montrer que
$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

1.4 Nombres complexes et géométrie plane

1.4.1 Le plan complexe

Définition 1.4.1

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct.

— Si M est un point du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$
on appelle *affixe* de M le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.

— Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$
on appelle *affixe* de $\overrightarrow{u}$ le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.

Remarque

- Si M est un point du plan, son affixe est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Proposition 1.4.2

— Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a et $b \in \mathbb{C}$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

— Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives u et $v \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda\,\overrightarrow{u} + \mu\,\overrightarrow{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.

Proposition 1.4.3

— Soit a et b deux nombres complexes. Alors $|a - b|$ est la distance entre les points d'affixes a et b.

— Soit u un nombre complexe. Alors $|u|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Proposition 1.4.4

Soit A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c. Alors

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \ [2\pi].$$

Proposition 1.4.5

Soit A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c. Alors

— A, B, C sont alignés si et seulement si
$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

— (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si
$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Remarques

⇨ Soit A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, $c \in \mathbb{C}$. Si A, B, C sont deux à deux distincts, alors

$$\begin{aligned} A,\ B,\ C \text{ sont alignés} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{c-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{c-a}{b-a}\right)} \\ &\Longleftrightarrow \quad (c-a)\overline{(b-a)} = \overline{(c-a)}(b-a). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que même si A, B, C ne sont pas deux à deux distincts

$$A,\ B,\ C \text{ sont alignés} \quad \Longleftrightarrow \quad (c-a)\overline{(b-a)} = \overline{(c-a)}(b-a).$$

⇨ La proposition précédente étant essentiellement utilisée de cette manière, on pourra tolérer exceptionnellement de l'appliquer, même si A, B, C ne sont pas deux à deux distincts. Ce genre de « division par zéro » est parfois tolérée en géométrie. Bien entendu, dans tout autre domaine des mathématiques, ces horreurs ne seront pas tolérées.

Exercice 19

⇨ Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. On construit A_1 extérieur au quadrilatère tel que le triangle BA_1C est isocèle et rectangle en A_1. De même pour B_1, C_1, D_1. Montrer que les segments $[A_1C_1]$ et $[D_1B_1]$ ont même longueur et sont orthogonaux.

1.4.2 Les similitudes directes

Définition 1.4.6

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. On appelle *translation* de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application qui au point M associe l'unique point M' tel que
$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$

Proposition 1.4.7

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe $u \in \mathbb{C}$. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe
$$z' = z + u.$$

Remarque

⇨ Une translation conserve les distances et les angles.

Définition 1.4.8

Soit Ω un point du plan et $\rho \in \mathbb{R}^*$. On appelle *homothétie* de centre Ω et de rapport ρ l'application qui au point M associe l'unique point M' tel que
$$\overrightarrow{\Omega M'} = \rho\overrightarrow{\Omega M}.$$

Proposition 1.4.9

Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\rho \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de centre Ω et de rapport ρ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe
$$z' = \rho(z - \omega) + \omega.$$

Remarque

⇨ Une homothétie de rapport $\rho \in \mathbb{R}^*$ multiplie les distances par $|\rho|$ et conserve les angles.

Définition 1.4.10

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *rotation* de centre Ω et d'angle θ l'application qui au point M associe

— Ω si $M = \Omega$.

— l'unique point M' tel que

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$$

sinon.

Proposition 1.4.11

Soit Ω un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Remarque

⇨ Une rotation conserve les distances et les angles.

Exercice 20

⇨ Quelle est l'expression en notation complexe des transformations suivantes ?

— **a.** La symétrie centrale de centre 0.

— **b.** L'homothétie de centre 0 et de rapport 2.

— **c.** L'homothétie de centre 2 et de rapport 1/2.

— **d.** La composée des deux dernières transformations.

— **e.** La rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$.

— **f.** La rotation de centre $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/2$.

— **g.** La composée des deux dernières transformations.

— **h.** La symétrie orthogonale d'axe (Ox).

— **i.** La symétrie orthogonale dont l'axe $\mathcal{D}_\theta$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Définition 1.4.12

Soit Ω un point du plan, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *similitude* de centre Ω, de rapport r et d'angle θ la composée (commutative) de l'homothétie de centre Ω et de rapport r et de la rotation de centre Ω et d'angle θ.

Proposition 1.4.13

Soit Ω un point du plan d'affixe ω, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La similitude de centre Ω, de rapport r et d'angle θ transforme le point M d'affixe z en le point M' d'affixe

$$z' = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Remarques

⇨ Si $\rho < 0$, l'homothétie de centre Ω et de rapport ρ est une similitude de centre Ω, de rapport $|\rho|$ et d'angle π.

⇨ Une similitude de rapport $r > 0$ et d'angle θ multiplie les distances par r et conserve les angles.

Dans la suite, on confondra un point et son affixe, un vecteur et son affixe. On identifie ainsi le plan à $\mathbb{C}$.

Définition 1.4.14

On appelle *similitude directe* toute application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

Remarque

⇨ Les translations et les similitudes de centre Ω de rapport $r \in \mathbb{R}_+^*$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ sont des similitudes directes. Nous allons voir que ce sont les seules.

Proposition 1.4.15

La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

Proposition 1.4.16

Soit f une similitude directe et $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

— Si $a = 1$, f est la translation de vecteur b.
— Sinon, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. f admet un unique point fixe ω et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

Autrement dit f est la similitude de centre ω, de rapport r et d'angle θ.

Exercice 21

⇨ À quelle transformation géométrique correspond la fonction $f : z \mapsto (3 - \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}z$?

1.5 Qcm

Le corps des nombres complexes

Définition, conjugaison, module

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le nombre complexe $(z - \mathrm{i})(z - 2\mathrm{i})$ est égal à

   ☐ **a.** $z^2 - 2$ ☐ **b.** $z^2 + 2$ ☐ **c.** $z^2 - 3\mathrm{i}z - 2$ ☐ **d.** $z^2 - 3\mathrm{i}z + 2$

2. Si z est un nombre complexe, quelle est la partie imaginaire de $z - \mathrm{i}\overline{z}$?

   ☐ **a.** $2\,\mathrm{Im}(z)$ ☐ **b.** $\mathrm{Im}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\overline{z})$ ☐ **c.** $\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z)$ ☐ **d.** $\mathrm{Im}(z) - \mathrm{Re}(z)$

3. Si z est un nombre complexe, quelle est la partie réelle de $z + \mathrm{i}\overline{z}$?

   ☐ **a.** $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}(\overline{z})$ ☐ **b.** $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$ ☐ **c.** $\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)$ ☐ **d.** $2\,\mathrm{Re}(z)$

4. Si x est un nombre réel, la partie réelle de $z := \frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}$ est

   ☐ **a.** $\dfrac{1}{1+x^2}$ ☐ **b.** $\dfrac{1}{1-x^2}$ ☐ **c.** $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ ☐ **d.** $\dfrac{2x}{1-x^2}$

5. Quel est l'inverse de $3 - 4\mathrm{i}$?

   ☐ **a.** $\dfrac{1}{3} - \dfrac{\mathrm{i}}{4}$ ☐ **b.** $\dfrac{1}{3} + \dfrac{\mathrm{i}}{4}$ ☐ **c.** $\dfrac{3}{5} + \dfrac{4\mathrm{i}}{5}$ ☐ **d.** $\dfrac{3}{25} + \dfrac{4\mathrm{i}}{25}$

6. L'inverse d'un nombre complexe non nul z est égal à son conjugué $\overline{z}$ si et seulement si

   ☐ **a.** $z = 1$ ☐ **b.** $|z| = 1$
   ☐ **c.** z est réel ☐ **d.** z est imaginaire pur

7. Soit $z, u \in \mathbb{C}$ tels que $u^2 = z$. Quand peut-on dire que $|u| < |z|$?

   ☐ **a.** c'est toujours le cas ☐ **b.** lorsque z n'est pas nul
   ☐ **c.** lorsque $0 < |z| < 1$ ☐ **d.** lorsque $|z| > 1$

8. Notons C_r le cercle du plan complexe de centre 0 et de rayon $r > 0$. L'ensemble C_r est stable pour le produit

   ☐ **a.** pour tout r ☐ **b.** seulement pour $r \leqslant 1$
   ☐ **c.** seulement pour $r = 1$ ☐ **d.** jamais

Inégalité triangulaire

1. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Si $|z| = 1$ et $|z'| = 2$, alors $|z' - z|$ est

   ☐ **a.** égal à 1 ☐ **b.** compris entre 1 et $\sqrt{5}$
   ☐ **c.** compris entre 1 et 3 ☐ **d.** inférieur à -1

2. Combien y a-t-il de nombres complexes z tels que $|z - \mathrm{i}| \leqslant 1$ et $|z - 2| \leqslant 1$?

   ☐ **a.** aucun ☐ **b.** un seul
   ☐ **c.** deux complexes conjugués ☐ **d.** une infinité

Puissance entière, binôme de Newton

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et x un réel. Combien vaut $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{2k+1}$?

   ☐ **a.** $(1+x)^{2n+1}$ ☐ **b.** $x\left(1+x^2\right)^n$ ☐ **c.** $2^n x^{2k+1}$ ☐ **d.** $\left(1 + x^{2+\frac{1}{k}}\right)^n$

Forme trigonométrique

Exponentielle iθ

1. La formule de Moivre indique que pour tout réel x

☐ **a.** $(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$ ☐ **b.** $(\cos x + \sin x)^n = \cos(nx) + \sin(nx)$
☐ **c.** $2\cos x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}$ ☐ **d.** $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

2. Si x est un réel non nul modulo π, le quotient $\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-1}$ vaut

☐ **a.** $\mathrm{i}\tan x$ ☐ **b.** $\cot\mathrm{an}\, x$ ☐ **c.** $\mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\, x$ ☐ **d.** $-\mathrm{i}\,\mathrm{cotan}\, x$

3. Si a et b sont deux réels, on a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = 0$ pour

☐ **a.** $a \equiv -b\ [2\pi]$ ☐ **b.** $a \equiv -b\ [\pi]$ ☐ **c.** $a \equiv b + \pi\ [2\pi]$ ☐ **d.** aucune valeur de a et b

4. La fonction $f : t \mapsto \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)^2$ est périodique de période

☐ **a.** 1 ☐ **b.** $\frac{\pi}{2}$ ☐ **c.** π ☐ **d.** elle n'est pas périodique

Application à la trigonométrie

1. Si x est un nombre réel, $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)^6$ vaut

☐ **a.** $-64\sin^6 x$ ☐ **b.** $64\sin^6 x$ ☐ **c.** $64\cos^6 x$ ☐ **d.** $64\sin(6x)$

2. Si x est un réel dans $]0, 2\pi[$, le nombre complexe $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1}$ est égal à

☐ **a.** $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n-1)x}{2}} \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ☐ **b.** $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n-1)x}{2}} \dfrac{\cos\frac{nx}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ ☐ **c.** $\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)x}{2}} \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ☐ **d.** $\mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}nx}{2}} \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

Forme trigonométrique

1. Un argument de $1 - \mathrm{i}$ est

☐ **a.** $\frac{\pi}{4}$ ☐ **b.** $\frac{3\pi}{4}$ ☐ **c.** $\frac{5\pi}{4}$ ☐ **d.** $\frac{7\pi}{4}$

2. Le module de $z := \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ est

☐ **a.** $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$ ☐ **b.** $\sqrt{2}$ ☐ **c.** $\frac{1}{2}$ ☐ **d.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. Un argument de $z := \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$ est

☐ **a.** $-\frac{\pi}{12}$ ☐ **b.** $\frac{\pi}{12}$ ☐ **c.** $\frac{5\pi}{12}$ ☐ **d.** $\frac{7\pi}{12}$

4. Si a et b sont deux réels, l'argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$ (lorsque ce nombre est non nul) est égal à

☐ **a.** $\frac{a+b}{2}\ [\pi]$ ☐ **b.** $\frac{a+b}{2}\ [2\pi]$ ☐ **c.** $\pm\frac{a+b}{2}\ [2\pi]$ ☐ **d.** $a + b\ [2\pi]$

Exponentielle complexe

1. Soit $z := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ un nombre complexe, où r est un réel positif. Le module de e^z est

☐ **a.** e^r ☐ **b.** $\mathrm{e}^{r\cos t}$ ☐ **c.** $\mathrm{e}^{r\sin t}$ ☐ **d.** $re^{|t|}$

2. Soit $z := r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ un nombre complexe, où r est un réel positif. Un argument de e^z est

☐ **a.** $\sin t$ ☐ **b.** $r\sin t$ ☐ **c.** rt ☐ **d.** $r\cos t$

Racines d'un nombre complexe

L'équation du second degré

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Que dire de z si z^2 est réel ?

   ☐ **a.** z est réel ☐ **b.** z est réel ou de module 1
   ☐ **c.** z est réel ou imaginaire pur ☐ **d.** z est réel ou égal à i ou $-$i

2. Que dire d'un nombre complexe z dont les deux racines carrées sont conjuguées ?

   ☐ **a.** c'est toujours le cas ☐ **b.** cela n'est pas possible
   ☐ **c.** z est un imaginaire pur ☐ **d.** z est un nombre réel négatif

3. Soit a et b deux nombres complexes et z_1 la racine de l'équation du second degré $z^2 - 2az + b = 0$ qui a le plus grand module. Alors

   ☐ **a.** $|z_1| \leqslant |a|$ ☐ **b.** $|z_1| \leqslant |b|$
   ☐ **c.** $|z_1| \geqslant |a|$ ☐ **d.** $|z_1| \geqslant |b|$

4. Soit z un nombre complexe non nul tel que $z + \frac{1}{z}$ est réel. Alors

   ☐ **a.** z est réel ☐ **b.** z est réel ou de module 1
   ☐ **c.** z est réel ou imaginaire pur ☐ **d.** z est réel ou égal à i ou égal à $-$i

5. Laquelle des équations suivantes admet deux solutions complexes conjuguées ?

   ☐ **a.** $z^2 + 3\mathrm{i}z + 4 = 0$ ☐ **b.** $z^2 + 3\mathrm{i}z - 4 = 0$
   ☐ **c.** $z^2 + 3z + 4 = 0$ ☐ **d.** $z^2 + 3z - 4 = 0$

Racines n-ièmes

1. Le nombre complexe $z \coloneqq 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ est une racine 6-ième de

   ☐ **a.** 2 ☐ **b.** 12 ☐ **c.** 64 ☐ **d.** $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{18}}$

2. Les solutions de l'équation $z^6 = \overline{z}^2$ sont

   ☐ **a.** les racines quatrièmes de l'unité ☐ **b.** les racines quatrièmes de l'unité et 0
   ☐ **c.** les racines huitièmes de l'unité ☐ **d.** les racines huitièmes de l'unité et 0

3. Soit $n \geqslant 2$. Que dire du nombre complexe z si l'ensemble des racines n-ièmes de z est stable par conjugaison ?

   ☐ **a.** $z = 1$ ☐ **b.** z est un réel positif
   ☐ **c.** z est un réel quelconque ☐ **d.** z est un imaginaire pur

4. Laquelle des parties suivantes de $\mathbb{C}$ n'est pas stable par l'application $z \mapsto 1/z$?

   ☐ **a.** Le cercle $\mathbb{U} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
   ☐ **b.** La droite des imaginaires purs privée de 0
   ☐ **c.** Le demi-plan des complexes de partie imaginaire strictement positive
   ☐ **d.** L'ensemble des racines 100-ièmes de 1

Nombres complexes et géométrie plane

Le plan complexe

Les similitudes directes

1.6 Exercices

Le corps des nombres complexes

Définition, conjugaison, module

Exercice 1 : Lieu

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ par
$$f(z) \coloneqq \frac{z+1}{z-2}.$$
Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ a-t-on $|f(z)| = 1$? $\mathrm{Re}\,(f(z)) = 0$?
2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$ par
$$g(z) \coloneqq \frac{2z - \mathrm{i}}{z - 2\mathrm{i}}.$$
Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$ a-t-on $g(z) \in \mathbb{R}$? $g(z) \in \mathbb{U}$?

Inégalité triangulaire

Exercice 2 : Inégalité

Soit a et b deux nombres complexes.

1. Montrer que
$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|\,.$$
2. Déterminer les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 3 : Somme

Soit $z_0, z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{2^k} \neq 0.$$
On pourra commencer par majorer
$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{2^k}\right|.$$

Exercice 4 : Majoration

Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = nz^n.$$
Montrer que $|z| \leqslant 1$.

Puissance entière, binôme de Newton

Exercice 5 : Majorations

1. Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel non nul. Montrer que si on pose $M \coloneqq \max(|a|\,, |b|)$, alors
$$|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}\,|a-b|\,.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et n un entier non nul. Montrer que
$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n.$$

Forme trigonométrique

Exponentielle $\mathrm{i}\theta$

Application à la trigonométrie

Exercice 6 : Linéarisation

Linéariser l'expression $\cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice 7 : Calcul de sommes trigonométriques

On se donne un réel x.

1. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n} k\cos(kx).$$

2. (a) On suppose que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx} = \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2.$$

   (b) Calculer la valeur de cette somme pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ de deux manières distinctes.

Forme trigonométrique

Exercice 8 : Mise sous forme trigonométrique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$z = -\sin 2\theta + 2\mathrm{i}\cos^2\theta.$$

1. Déterminer le module et l'argument de z.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z et $z-1$ aient même module.

Exercice 9 : Calculs

Mettez les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique généralisée

$$\textbf{a. } \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}, \qquad \textbf{b. } \left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n, \qquad \textbf{c. } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'},$$

$$\textbf{d. } \frac{a+b}{a-b} \quad \text{et} \quad \textbf{e. } \frac{a+b}{1-ab} \qquad \text{où } a := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ et } b := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}.$$

Exponentielle complexe

Racines d'un nombre complexe

L'équation du second degré

Exercice 10 : L'équation du second degré

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$\textbf{a. } z^2 = -7+24\mathrm{i}, \qquad \textbf{b. } z^2 = -3-4\mathrm{i}, \qquad \textbf{c. } z^2+z+1=0,$$

$$\textbf{d. } z^2 - 2(2+\mathrm{i})z + 6 + 8\mathrm{i} = 0, \qquad \textbf{e. } \mathrm{i}z^2 + (4\mathrm{i}-3)z + \mathrm{i} - 5 = 0,$$

$$\textbf{f. } z^4 + 2z^3 + z^2 + 2z + 1 = 0 \quad \textit{On pourra poser } u := z + \frac{1}{z},$$

$$\textbf{g. } \begin{cases} z_1 z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3}, \end{cases} \qquad \textbf{h. } \begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1^2 + z_2^2 = 3. \end{cases}$$

Exercice 11 : Modules et arguments des racines d'un trinôme

Soit u un réel tel que $|u| < \pi$. Calculer les modules et arguments de chacune des racines de l'équation

$$z^2 - 2z(\cos u + \mathrm{i}\sin u) + 2\mathrm{i}\sin u(\cos u + \mathrm{i}\sin u) = 0.$$

Exercice 12 : Trinôme dont les racines ont même module

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que les racines de $z^2 + az + b = 0$ ont même module si et seulement si il existe $\lambda \in [0, 4]$ tel que $a^2 = \lambda b$.

Racines n-ièmes

Exercice 13 : Équations

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$

$$\textbf{a. } z^5 = -1, \qquad \textbf{b. } z^6 = \frac{-4}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}, \qquad \textbf{c. } z^3 = \overline{z},$$

$$\textbf{d. } (z + \mathrm{i})^n = (z - \mathrm{i})^n, \qquad \textbf{e. } 1 + \frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} + \left(\frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\right)^3 = 0.$$

Exercice 14 : Équation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$\left(z^2 + 1\right)^n = (z - \mathrm{i})^{2n}.$$

Exercice 15 : Relation trigonométrique

En considérant les racines 11-ièmes de 1, montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 16 : Calcul avec j

1. Calculer
$$\left(a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2\right)\left(a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}\right).$$
2. Sans effectuer de développement, retrouver le fait que cette expression ne change pas lorsqu'on échange deux variables.

Exercice 17 : Autour des racines de l'unité

Soit $(\omega_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité. Calculer pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k.$$

Nombres complexes et géométrie plane

Le plan complexe

Exercice 18 : Caractérisation d'un triangle équilatéral

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c.

1. On suppose que $B \neq A$. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si
$$\frac{c - a}{b - a} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{c - a}{b - a} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}.$$
2. En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + cb.$$

Exercice 19 : Triangles équilatéraux

Soit (ABC) et (ADE) deux triangles équilatéraux directs et $(ACFD)$ un parallélogramme. Montrer que (BFE) est équilatéral direct.

Exercice 20 : Algèbre et géométrie

A tout nombre complexe $z \neq 4$, on associe le nombre

$$z' = \frac{\mathrm{i}z - 4}{z - 4}$$

et on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que z' est réel. Déterminer $\mathcal{C}$ par une méthode algébrique puis par une méthode géométrique.

Exercice 21 : Lieu

Soit le point A d'affixe 2 et le point B d'affixe -2. À tout point M d'affixe z, autre que A, on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2z - 4}{\bar{z} - 2}.$$

1. Déterminer $|z|$. Que peut-on en déduire pour M' ?
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points d'affixe z tels que $M' = B$.
3. Pour tout point M de $\mathcal{E}$ et distincts de A et B, que peut-on dire de

$$\frac{z - 2}{z' - 2} \ ?$$

   Interpréter géométriquement ce résultat et en déduire une construction de M'.

Exercice 22 : Triangles

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, z et $\mathrm{i}z$. Déterminer l'ensemble des points B pour lesquels A, B et C sont alignés.
2. On considère les points E, F et G non alignés, d'affixes respectives, z_1, z_2 et z_3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle (EFG) soit rectangle isocèle en E.

Les similitudes directes

Exercice 23 : Similitudes

1. Caractériser géométriquement la similitude

$$z \mapsto 2(1 + \mathrm{i})z - 7 - 4\mathrm{i}.$$

2. Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/4$.
3. On note r la rotation de centre $2 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/2$ et s la symétrie centrale de centre $1 - \mathrm{i}$. Caractériser géométriquement $s \circ r$.
4. On note r la rotation de centre i et d'angle $\pi/3$ et r' la rotation de centre $2\mathrm{i}$ et d'angle $-\pi/3$. Caractériser géométriquement $r' \circ r$.

Chapitre 2

Logique, ensembles

« Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes. »

— André Weil (1906-1998)

« Sur l'enseigne du barbier du village, on peut lire : Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Savez-vous qui rase le barbier ? »

— Bertrand Russel (1872–1970)

« J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion. »

— Stendhal (1783-1842)

2.1 Éléments de logique

2.1.1 Assertion, prédicat

Définition 2.1.1

— On appelle *assertion* toute phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule valeur de vérité : vrai ou faux.
— Soit E un ensemble. On appelle *prédicat* sur E toute phrase mathématique dont la valeur de vérité dépend d'un élément $x \in E$.

Exemples

⇨ « 7 est un nombre premier » est une assertion vraie. L'assertion « 7 est divisible par 3 » est fausse.

⇨ $P(x) \coloneqq$ « x est rationnel » est un prédicat sur $\mathbb{R}$. $P(3/4)$ est vrai alors que $P(\sqrt{2})$ est faux.

⇨ $P(a, b, c) \coloneqq$ « $a^2 + b^2 = c^2$ » est un prédicat sur $\mathbb{N}^3$.

⇨ « L'ensemble des nombres premiers est infini » est une assertion vraie. L'assertion « Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ est premier » est une assertion dont on pense qu'elle est vraie. Mais aujourd'hui, personne n'en a fait la preuve.

Remarques

⇨ Deux principes fondamentaux gouvernent les valeurs de vérité des assertions.
— Le *principe de non-contradiction* : Une assertion ne peut être à la fois vraie et fausse.
— Le *principe du tiers exclu* : Une assertion qui n'est pas vraie est fausse.

⇨ Si P est un prédicat, on dit que P est vrai lorsque, quel que soit $x \in E$, $P(x)$ est vraie. Dire que P n'est pas vrai signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ est faux.

Définition 2.1.2

— Le *quantificateur universel* $\forall$ signifie « pour tout »
— Le *quantificateur existentiel* $\exists$ signifie « il existe (au moins) un »

Remarque

⇨ On trouve parfois le quantificateur $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ».

Exercices 1

⇨ Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad x + y \geqslant 0.$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \geqslant 0.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 \geqslant x.$

⇨ Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n.$$

Définition 2.1.3

Soit P et Q deux assertions.
— On définit l'assertion (non P) comme étant vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

— On définit l'assertion $[P \quad \text{et} \quad Q]$ comme étant vraie lorsque P et Q sont vraies et fausse sinon.
— On définit l'assertion $[P \quad \text{ou} \quad Q]$ comme étant vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.

Remarques

⇨ Les valeurs de vérité de ces assertions sont données par les tables suivantes.

P	V	F
non P	F	V

non P

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	F

$P \quad \text{et} \quad Q$

P \ Q	V	F
V	V	V
F	V	F

$P \quad \text{ou} \quad Q$

⇨ Lorsque le menu d'un restaurant vous propose « fromage ou dessert », le « ou » est employé au sens strict (on dit aussi exclusif) ; il n'est pas possible d'avoir les deux. En mathématiques, le « ou » est employé au sens large (on dit aussi inclusif). Lorsqu'on dit qu'un entier naturel n est divisible par 2 ou par 3, il peut très bien être divisible par 2 et par 3.

2.1.2 Implication, équivalence

Définition 2.1.4

Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Longrightarrow Q$ comme étant fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie sinon.

Remarques

⇨ Montrer $P \Longrightarrow Q$ revient à prouver que si P est vraie, alors Q est vraie.

⇨ Si P et Q sont deux prédicats sur E, $P \Longrightarrow Q$ signifie que $Q(x)$ est vraie dès que $P(x)$ est vraie. Si c'est le cas, on écrit

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$$

et on dit que P est une condition suffisante pour Q ou que Q est une condition nécessaire pour P.

Exercices 2

⇨ Dans les exemples suivants, dites si le prédicat P est une condition nécessaire ou une condition suffisante pour Q.
— $E = \mathbb{R}$, $P(x) :=$ « $x \in \mathbb{Q}$ » et $Q(x) :=$ « $x^2 \in \mathbb{Q}$ ».
— E est l'ensemble des triangles du plan, $P(T) :=$ « T est isocèle » et $Q(T) :=$ « T est équilatéral ».
— $E = \mathbb{R}^2$, $P(x, y) :=$ « $x \equiv y\ [2\pi]$ » et $Q(x, y) :=$ « $x \equiv y\ [\pi]$ ».

⇨ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad [xy > 0 \quad \text{et} \quad x + y > 0] \quad \Longrightarrow \quad [x > 0 \quad \text{et} \quad y > 0].$$

⇨ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x| \leqslant \varepsilon\right] \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Proposition 2.1.5: Modus Ponens

Soit P et Q deux assertions. Si P et $P \Longrightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie.

Remarque

⇨ En pratique, on utilise cette proposition lorsque P et Q sont des prédicats. Si $P \Longrightarrow Q$ est vrai et x est un élément de E tel que $P(x)$ est vrai, alors $Q(x)$ est vrai. Dans ce cadre, on dit que $P \Longrightarrow Q$ est un théorème. Vérifier les hypothèses du théorème revient à vérifier que $P(x)$ est vrai et appliquer le théorème nous permet de conclure que $Q(x)$ est vrai. Traduisons mathématiquement le raisonnement suivant : « Socrate est un homme. Puisque tous les hommes sont mortels, alors Socrate est mortel ». Si $P(x) :=$ « x est un homme » et $Q(x) :=$ « x est mortel », alors l'énoncé « Tous les hommes sont mortels » s'écrit

$$\forall x \in U, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x).$$

Puisque Socrate est un homme ($P\,(\text{Socrate})$ est vrai), on en déduit que Socrate est mortel ($Q\,(\text{Socrate})$ est vrai).

Exercice 3

➯ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < a \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant b.$$

Montrer que $a \leqslant b$.

Définition 2.1.6

Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ comme étant vraie lorsque P et Q ont même valeur de vérité, et fausse sinon.

Remarques

➯ Les valeurs de vérité des assertions $P \Longrightarrow Q$ et $P \Longleftrightarrow Q$ sont regroupées dans les tableaux suivants.

P \ Q	V	F
V	V	F
F	V	V

$P \Longrightarrow Q$

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	V

$P \Longleftrightarrow Q$

➯ Les assertions $P \Longleftrightarrow Q$ et $Q \Longleftrightarrow P$ ont même valeur de vérité ; on dit que la relation d'équivalence est symétrique.

➯ Si P et Q sont deux prédicats sur E, dire que $P \Longleftrightarrow Q$ est vrai signifie que $Q(x)$ et $P(x)$ ont même valeur de vérité quel que soit $x \in E$. Si c'est le cas, on écrit

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$$

et on dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q.

Proposition 2.1.7

Soit P et Q deux assertions. Alors $P \Longleftrightarrow Q$ et $[(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)]$ ont même valeur de vérité.

Remarque

➯ Pour démontrer que $P \Longleftrightarrow Q$, on pourra démontrer que $P \Longrightarrow Q$, puis que $Q \Longrightarrow P$; on dit qu'on raisonne par double implication.

Exercice 4

➯ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \sin(\lambda x).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit 2π-périodique.

Proposition 2.1.8

Soit P, Q, R trois assertions. Alors

$$\begin{aligned} [P \quad \text{et} \quad (Q \quad \text{ou} \quad R)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [(P \quad \text{et} \quad Q) \quad \text{ou} \quad (P \quad \text{et} \quad R)]\,, \\ [P \quad \text{ou} \quad (Q \quad \text{et} \quad R)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [(P \quad \text{ou} \quad Q) \quad \text{et} \quad (P \quad \text{ou} \quad R)]\,. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.9: Lois de Morgan

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$\begin{aligned} \text{non } (P \quad \text{et} \quad Q) \quad &\Longleftrightarrow \quad [(\text{non} \quad P) \quad \text{ou} \quad (\text{non} \quad Q)]\,, \\ \text{non } (P \quad \text{ou} \quad Q) \quad &\Longleftrightarrow \quad [(\text{non} \quad P) \quad \text{et} \quad (\text{non} \quad Q)]\,, \\ \text{non } (\text{non} \quad P) \quad &\Longleftrightarrow \quad P. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.10: Raisonnement par contraposée

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$[P \Longrightarrow Q] \quad \Longleftrightarrow \quad [\text{non} \quad Q \Longrightarrow \text{non} \quad P]\,.$$

Remarque

➯ Lorsque l'on démontre $[(\text{non}\ \ Q) \Longrightarrow (\text{non}\ \ P)]$ pour montrer que $[P \Longrightarrow Q]$, on dit que l'on raisonne par contraposée.

Exercice 5

➯ Supposons que l'on ait montré que π^2 est irrationnel. Peut-on en déduire que π est irrationnel ?

Proposition 2.1.11

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$[\text{non}\ \ (P \Longrightarrow Q)] \quad \Longleftrightarrow \quad [P \quad \text{et} \quad (\text{non}\ \ Q)]\,.$$

Proposition 2.1.12

Soit P un prédicat sur l'ensemble E. Alors

$$\begin{aligned} \text{non}\ \ [\forall x \in E, \quad P(x)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [\exists x \in E, \quad \text{non}\ \ (P(x))]\,, \\ \text{non}\ \ [\exists x \in E, \quad P(x)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [\forall x \in E, \quad \text{non}\ \ (P(x))]\,. \end{aligned}$$

Exercice 6

➯ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire les phrases suivantes avec des quantificateurs. En déduire leur négation.

« f est majorée », « f est croissante », « f est décroissante ».

2.2 Ensemble

2.2.1 Ensemble, élément

Définition 2.2.1

Les notions d'*ensemble*, d'*élément* et d'*appartenance* sont des notions premières en mathématiques que l'on ne définit pas. Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets mathématiques appelés éléments. La notation $x \in E$ signifie que l'élément x appartient à l'ensemble E.

Remarque

➯ Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des objets mathématiques, l'ensemble constitué de ces éléments est noté $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Définition 2.2.2

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est *inclus* dans B et on note $A \subset B$ lorsque

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

Proposition 2.2.3

Deux ensembles A et B sont égaux lorsqu'ils possèdent les mêmes éléments, c'est-à-dire lorsque

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A.$$

Remarque

➯ En particulier $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ et $\{0, 0, 1\} = \{0, 1\}$.

Définition 2.2.4

Soit E un ensemble. On appelle partie de E tout ensemble A inclus dans E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque

➯ Un même objet mathématique peut très bien, selon le contexte, être un élément ou un ensemble. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 7

➯ Déterminer $\mathcal{P}(\{1,2\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

2.2.2 Opérations élémentaires

Définition 2.2.5

Soit E un ensemble et P un prédicat sur E. On définit

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

comme l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vrai. C'est une partie de E.

Définition 2.2.6

Soit A et B deux parties de E. On définit

$$A \cap B \coloneqq \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}, \qquad A \cup B \coloneqq \{x \in E \mid x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\},$$

$$\overline{A} \coloneqq \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Remarques

➯ Le complémentaire de A dans E est aussi noté A^c.

➯ On dit que deux ensembles A et B sont *disjoints* lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Proposition 2.2.7

Soit A, B, C trois parties de E. Alors

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Proposition 2.2.8: Lois de Morgan

Soit A et B deux parties de E. Alors

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{\overline{A}} &= A. \end{aligned}$$

Exercices 8

➯ Soit A et B deux parties d'un même ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

➯ Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E non vide.

1. Si $A \cup B = A \cup C$, a-t-on $B = C$?
2. Si $A \cup B = A \cap B$, a-t-on $A = B$?
3. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
4. Montrer que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$, alors $A = \overline{B}$ et $B = \overline{A}$.

Définition 2.2.9

Soit A et B deux parties de E. On définit

$$A \setminus B \coloneqq \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B\}.$$

Remarques

➯ L'ensemble $A \setminus B$ se lit « A privé de B ».

➯ Si A est une partie de E, $\bar{A} = E \setminus A$.

Définition 2.2.10

Soit A et B deux ensembles. On définit $A \times B$ comme l'ensemble des *couples* (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. Par définition, deux couples $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$ sont égaux lorsque $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Définition 2.2.11

— Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n ensembles, on définit $A_1 \times \cdots \times A_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Par définition, deux n-uplets $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ sont égaux lorsque

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = b_k.$$

— Si A est un ensemble et $n \in \mathbb{N}$, on définit A^n comme

$$A^n \coloneqq \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois } A}.$$

Remarques

⇨ A^1 est l'ensemble des 1-uplets (a), pour $a \in A$; on confondra cet ensemble avec A. Quant à A^0, c'est l'ensemble qui contient un unique élément, le 0-uplet $()$.

⇨ Pour énoncer qu'un prédicat portant sur deux variables est vrai, on peut écrire « $\forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad P(x, y)$ ». On condense cependant souvent cette phrase en « $\forall (x, y) \in A^2, \quad P(x, y)$ » ou en « $\forall x, y \in A, \quad P(x, y)$ ».

2.3 Application

2.3.1 Définition, exemples

Définition 2.3.1

Soit E et F deux ensembles. Une *application* f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$, appelé image de x par f. On note

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que E est le *domaine* de f et que F est son *codomaine*. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarques

⇨ Deux applications sont égales lorsqu'elles ont même domaine et codomaine et qu'elles prennent la même valeur en chaque point de ce domaine.

⇨ On utilise aussi les expressions « ensemble de départ » et « ensemble d'arrivée » d'une application pour désigner respectivement son domaine et son codomaine.

⇨ « application » et « fonction » sont synonymes. L'usage veut cependant que l'on réserve le mot « fonction » aux applications dont le domaine et le codomaine sont des parties de $\mathbb{C}$.

⇨ L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi noté F^E.

⇨ Pour les fonctions usuelles, il arrive qu'on omette les parenthèses et qu'on écrive $\sin x$ au lieu de $\sin(x)$. Cependant, on ne se permettra pas de faire cela avec les autres fonctions.

Définition 2.3.2

Si f est une application de E dans F, on appelle *graphe* de f l'ensemble

$$\{(x, y) \in E \times F \mid f(x) = y\}.$$

Définition 2.3.3

Soit A une partie de E. On appelle *fonction caractéristique* de A et on note $\mathbb{1}_A$ l'application de E dans $\{0, 1\}$

définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques

⇨ Deux parties A et B de E sont égales si et seulement si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

⇨ Si A et B sont deux parties de E, alors

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \max\left(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\right).$$

Définition 2.3.4

Soit $f : E \to F$ et $y \in F$. On appelle *antécédent* de y tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 9

⇨ Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au couple (x, y) associe le couple $(x+2y, xy)$. Déterminer les antécédents de $(3, 1)$.

Définition 2.3.5

Soit $f : E \to F$.

— Soit B une partie de F. On appelle image réciproque de B et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B.

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

— Soit A une partie de E. On appelle image directe de A et on note $f(A)$ l'ensemble des éléments de F qui sont image d'un élément de A par f.

$$f(A) := \{y \in F \mid \exists x \in A, \quad f(x) = y\}$$

L'ensemble $f(E)$ est appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

Remarque

⇨ L'ensemble image $f(A)$ est aussi noté

$$\{f(x) : x \in A\}.$$

Exercices 10

⇨ Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Calculer $f^{-1}(f(\{\pi/2\}))$ et $f(f^{-1}(\{0, 2\}))$.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$. Calculer $f^{-1}(\mathbb{U})$.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x}{1+x^2}.$$

En lisant le tableau de variations de f, intuiter $f(\mathbb{R})$, puis prouver rigoureusement ce résultat.

⇨ Soit f une application de E dans F. Si A est une partie de E, comparer $f^{-1}(f(A))$ et A. De même, si B est une partie de F, comparer $f(f^{-1}(B))$ et B.

Définition 2.3.6

Soit f une application de E dans F.

— Si A est une partie de E, l'application

$$f\big|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est appelée *restriction* de f à A.

— On dit qu'une application g est un *prolongement* de f lorsque f est une restriction de g.
— Si B est une partie de F telle que
$$\forall x \in E, \quad f(x) \in B$$
l'application
$$f\big|^B : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
est appelée *corestriction* de f à B.

Remarque

⇨ Soit $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F telles que
$$\forall x \in A, \quad f(x) \in B.$$
Alors, on peut définir l'application
$$f\big|_A^B : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
appelée restriction de f à A, corestreinte à B.

Définition 2.3.7

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit l'application $g \circ f$ de E dans G par
$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) \coloneqq g\left(f(x)\right).$$

Remarque

⇨ Si A est une partie de E, alors $(g \circ f)(A) = g(f(A))$. De même, si B est une partie de G, alors
$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)).$$

Proposition 2.3.8

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$
On note cette application $h \circ g \circ f$.

2.3.2 Application injective, surjective, bijective

Définition 2.3.9

Soit $f : E \to F$. On dit que f est *injective* lorsque
$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$
c'est-à-dire lorsque tout élément de F a au plus un antécédent.

Exercices 11

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone alors elle est injective. La réciproque est-elle vraie ?

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$. Montrer qu'elle est injective.

⇨ Soit φ l'application qui à la fonction f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ associe la fonction $\varphi(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)]\,(x) \coloneqq f\left(\sin x\right)$$
Montrer que φ est injective.

⇨ Soit E un ensemble et A une partie de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$$

soit injective.

Définition 2.3.10

Soit $f : E \to F$. On dit que f est *surjective* lorsque

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y$$

c'est-à-dire lorsque tout élément de F a au moins un antécédent.

Proposition 2.3.11

Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Exercices 12

⇨ L'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

Définition 2.3.12

On dit qu'une application $f : E \to F$ est *bijective* lorsqu'elle est injective et surjective, c'est-à-dire lorsque tout élément de F possède un unique antécédent.

Exercices 13

⇨ Montrer que la fonction f qui à x associe $\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

⇨ Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (a, b) & \longmapsto & 2^a(2b+1) - 1 \end{array}$$

est bijective.

⇨ Soit X un ensemble et $f : X^2 \to X$ une bijection. Montrer que

$$\begin{array}{rccc} g : & X^3 & \longrightarrow & X \\ & (x, y, z) & \longmapsto & f(x, f(y, z)) \end{array}$$

est bijective.

Proposition 2.3.13

— La composée de deux applications injectives est injective.
— La composée de deux applications surjectives est surjective.
— La composée de deux applications bijectives est bijective.

Exercices 14

⇨ Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. De même, montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

⇨ Est-il vrai que si $g \circ f$ est bijective, f et g le sont ?

Définition 2.3.14

Soit E un ensemble. On appelle *identité* et on note Id_E l'application de E dans E définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{Id}_E(x) := x.$$

Si f est une application de E dans F

$$f \circ \mathrm{Id}_E = f \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_F \circ f = f.$$

Proposition 2.3.15

Soit f une application de E dans F.

— L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F\,.$$

Si tel est le cas, g est unique ; on l'appelle *bijection réciproque* de f et on la note f^{-1}.

— Si $f : E \to F$ est bijective, f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Remarques

⇨ Soit f une bijection de E dans F. Quel que soit $y \in F$, si $x \in E$ est tel que $f(x) = y$, alors $f^{-1}(y) = x$.

⇨ La fonction ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est une bijection et sa bijection réciproque est la fonction exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercices 15

⇨ Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 5x + 3y) \end{array}$$

est bijective et calculer f^{-1}.

⇨ Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement croissante, il en est de même pour f^{-1}. Que dire si f est impaire ?

Proposition 2.3.16

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

2.3.3 Famille

Si E est un ensemble, il est courant de se donner n éléments $f_1, \dots, f_n$ de E. Cela revient à définir une application

$$f : \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & f(i) \end{array}$$

où l'on pose $f(i) \coloneqq f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Nous dirons que f est une famille d'éléments de E indexée par $[\![1, n]\!]$. On peut généraliser ce principe et construire des familles indexées par un ensemble quelconque. Par exemple, on peut considérer l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ associe la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) \coloneqq \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

On a ainsi défini une famille d'éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ indexée par $\mathbb{R}$.

Définition 2.3.17

Soit E un ensemble et I un ensemble, appelé ensemble d'indices. On appelle *famille d'éléments de E indexée par I* toute application

$$f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & f_i. \end{array}$$

Cette application est notée $(f_i)_{i \in I}$. L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I est noté E^I.

Remarques

⇨ Une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$ est une suite d'éléments de E.

⇨ On appelle sous-famille d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ toute famille de la forme $(f_i)_{i \in J}$ où J est une partie de I.

⇨ Si A est un ensemble, on dit qu'une famille $(f_i)_{i \in I}$ est la famille des éléments de A lorsque f est une bijection de I dans A. Le fait de parler de « la » famille des éléments de A est un abus de langage, car cette famille n'est pas unique.

Définition 2.3.18

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On définit alors

$$\bigcap_{i\in I} A_i := \{x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i\},$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i := \{x \in E \mid \exists i \in I, \quad x \in A_i\}.$$

Exercice 16

⇨ Soit $f : E \to E$. On définit f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f^0 := \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} := f \circ f^n\right]$$

Soit A une partie de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n := f^n(A)$. Enfin, on pose $B := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que $A \subset B$ et que $f(B) \subset B$.

Proposition 2.3.19

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Alors

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

Définition 2.3.20: Partition

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de E lorsque

$$E = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad \left[\forall i, j \in I, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing\right].$$

Remarques

⇨ La définition de partition peut varier d'un cours à l'autre. Dans certains cours, on demande en plus que les A_i soient non vides ; on appelle alors *recouvrement disjoint* ce que nous appelons ici partition.

⇨ La notion de partition a été définie à l'aide de familles. Mais on peut aussi la définir de manière ensembliste ; on dit qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une *partition (au sens ensembliste)* de E lorsque
— $\forall x \in E, \quad \exists A \in \mathcal{P}, \quad x \in A$.
— $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}, \quad A_1 \neq A_2 \Longrightarrow A_1 \cap A_2 = \varnothing$.
— $\forall A \in \mathcal{P}, \quad A \neq \varnothing$.
Remarquons que dans la définition ensembliste, on demande à ce que les ensembles appartenant à $\mathcal{P}$ soient non vides.

Exercice 17

⇨ Déterminer les partitions au sens ensembliste de $E := \{1, 2, 3\}$.

2.4 Relation binaire

Définition 2.4.1

Soit E un ensemble. On appelle *relation binaire* sur E tout prédicat $\mathcal{R}$ défini sur $E \times E$. Si x et y sont deux éléments de E et $\mathcal{R}(x, y)$ est vrai, on écrit $x\mathcal{R}y$.

Définition 2.4.2

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est
— *réflexive* lorsque

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x.$$

— *transitive* lorsque

$$\forall x, y, z \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

— *symétrique* lorsque
$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$
— *antisymétrique* lorsque
$$\forall x, y \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x] \Longrightarrow x = y.$$

2.4.1 Relation d'ordre

Définition 2.4.3

On dit qu'une relation binaire $\preceq$ est une *relation d'ordre* lorsqu'elle est
— réflexive : $\forall x \in E, \quad x \preceq x$.
— transitive : $\forall x, y, z \in E, \quad [x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq z] \Longrightarrow x \preceq z$.
— antisymétrique : $\forall x, y \in E, \quad [x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq x] \Longrightarrow x = y$.
On appelle *ensemble ordonné* tout ensemble muni d'une relation d'ordre.

Remarques

⇨ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. La relation $\leqslant$ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par
$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)]$$
est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

⇨ Si E est un ensemble, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

⇨ Si $\preceq$ est une relation d'ordre sur E, la relation $\succeq$ définie par
$$\forall x, y \in E, \quad x \succeq y \quad \Longleftrightarrow \quad y \preceq x$$
est une relation d'ordre appelée relation d'ordre opposée à la première.

⇨ La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas réflexive.

Exercice 18

⇨ Montrer que la relation $|$ définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a|b \quad \Longleftrightarrow \quad [\exists k \in \mathbb{N}, \quad b = ka]$$
est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Définition 2.4.4

On dit qu'une relation d'ordre $\preceq$ est totale lorsque
$$\forall x, y \in E, \quad x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x.$$

Remarque

⇨ La relation d'ordre $\leqslant$ est totale sur $\mathbb{R}$. Par contre, les relations $\leqslant$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ et $|$ sur $\mathbb{N}$ ne sont pas totales.

Définition 2.4.5

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
— On dit que $M \in E$ est un *majorant* de A lorsque
$$\forall a \in A, \quad a \preceq M.$$
— On dit que $m \in E$ est un *minorant* de A lorsque
$$\forall a \in A, \quad m \preceq a.$$

Exercice 19

⇨ Soit $c > 0$. On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\forall (x, t), (x', t') \in \mathbb{R}^2, \quad (x, t) \preceq (x', t') \quad \Longleftrightarrow \quad |x' - x| \leqslant c \cdot (t' - t).$$
Vérifier que c'est une relation d'ordre. Dessiner l'ensemble des majorants et des minorants d'un couple (x_0, t_0).

L'ordre est-il total ?

Définition 2.4.6

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
- On dit que A admet un *plus grand élément* lorsqu'il existe un majorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle plus grand élément de A.
- On dit que A admet un *plus petit élément* lorsqu'il existe un minorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle plus petit élément de A.

Remarques

⇨ Muni de l'ordre usuel, $[0, 1[$ admet un plus petit élément 0 mais n'admet pas de plus grand élément. Muni de la relation de divisibilité, $\{2, 3\}$ n'admet ni de plus grand ni de plus petit élément.

⇨ Un ensemble admettant un plus petit ou un plus grand élément est non vide.

⇨ Si E est totalement ordonné et A est une partie finie non vide de E, alors il admet un plus petit et un plus grand élément.

2.4.2 Relation d'équivalence

Définition 2.4.7

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une *relation d'équivalence* lorsqu'elle est
- réflexive : $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$.
- transitive : $\forall x, y, z \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.
- symétrique : $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.

Remarque

⇨ Si E est un ensemble quelconque, la relation d'égalité est une relation d'équivalence. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par « $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a\mathcal{R}b \iff a \equiv b\ [n]$ » est une relation d'équivalence. De même, si f est une application de E dans F, la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par « $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$ » est une relation d'équivalence.

Exercice 20

⇨ Soit E un ensemble. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\mathcal{R}B \iff \text{« Il existe une bijection de } A \text{ dans } B. \text{ »}$$

est une relation d'équivalence.

Définition 2.4.8

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x \in E$. On appelle *classe d'équivalence de x* et on note $\mathrm{Cl}(x)$ l'ensemble des éléments de E en relation avec x

$$\mathrm{Cl}(x) := \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

On dit qu'une partie A de E est *une classe d'équivalence* lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $A = \mathrm{Cl}(x)$.

Remarque

⇨ Si $x, y \in E$, alors

$$\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y) \iff x\mathcal{R}y.$$

Proposition 2.4.9

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors, l'ensemble des classes d'équivalence réalise une partition de E.

Exercice 21

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de classes d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ pour la relation de congruence modulo n.

2.5 L'ensemble des entiers naturels

Dans ce cours, nous ne chercherons pas à construire l'ensemble des entiers naturels. Nous nous limiterons à la définition intuitive suivante.

$$\mathbb{N} \coloneqq \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Nous supposerons aussi définies les opérations usuelles $+$ et $\times$ ainsi que la relation d'ordre totale $\leqslant$. Nous admettrons enfin la proposition suivante.

Proposition 2.5.1

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Proposition 2.5.2

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

2.5.1 Récurrence

Proposition 2.5.3: Principe de récurrence

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que
- $0 \in A$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$.

Alors $A = \mathbb{N}$.

Remarques

⇨ Cette proposition est au cœur du principe de récurrence. Si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour démontrer cela d'appliquer la proposition précédente à

$$A \coloneqq \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_n \text{ est vraie}\}.$$

⇨ Le principe de récurrence double est une conséquence du principe de récurrence. En effet, si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [\mathcal{H}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{n+1}] \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+2}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour cela de remarquer que le prédicat $\mathcal{P}$ défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n \coloneqq \text{« } \mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1} \text{ sont vraies »}$$

vérifie le principe de récurrence.

⇨ De même, le principe de récurrence forte est une conséquence du principe de récurrence. En effet, si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [\mathcal{H}_0 \quad \text{et} \quad \ldots \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_n] \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour cela de remarquer que le prédicat $\mathcal{P}$ défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n \coloneqq \text{« } \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n \text{ sont vraies »}.$$

vérifie le principe de récurrence.

Exercices 22

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est un multiple de 3.

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 \coloneqq 1, \quad u_1 \coloneqq 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \coloneqq u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n^2$.

⇨ Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit comme produit de nombres premiers.

2.5.2 Définition par récurrence

Proposition 2.5.4

Soit E un ensemble, $f \in \mathcal{F}(E,E)$ et $x \in E$. Alors, il existe une unique suite (u_n) d'éléments de E telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Remarque

⇨ Il arrive qu'au lieu d'avoir une fonction $f \in \mathcal{F}(E,E)$, on ait une fonction $f \in \mathcal{F}(A,E)$ où A est une partie de E. Si $x \in A$, et que l'on souhaite prouver l'existence d'une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

nous sommes face à un problème bien plus délicat. En effet, l'existence d'une telle suite n'est pas garantie puisque si $u_n \in A$, alors $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$ est un élément de E mais on n'a aucune garantie qu'il soit dans A, ce qui est nécessaire pour définir u_{n+2}. Par exemple, il n'existe pas de suite (u_n) telle que

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n - 1}.$$

En effet, si tel était le cas, on aurait $u_1 = 1$ et $u_2 = (3u_1 - 2)/(u_1 - 1)$ ne serait pas défini. On ne peut tout simplement pas appliquer la proposition précédente, car la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{3x-2}{x-1} \end{array}$$

n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Définition 2.5.5

Soit E un ensemble, A une partie de E et $f \in \mathcal{F}(A,E)$. On dit qu'une partie B de A est *stable* par f lorsque

$$\forall x \in B, \quad f(x) \in B.$$

Remarques

⇨ Si B est stable par f, il est possible de considérer la restriction de f à B, corestreinte à B. On parle alors d'application *induite* à B.

⇨ Si A est une partie de E, $f \in \mathcal{F}(A,E)$ et $x \in A$, pour prouver l'existence d'une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

il suffit de trouver une partie B de A, stable par f et telle que $x \in B$.

Exercice 23

⇨ Soit $x \in [2, +\infty[$. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n - 1}.$$

2.6 Qcm

Éléments de logique

Assertion, prédicat

Implication, équivalence

Ensemble

Ensemble, élément

1. Soit E l'ensemble $\{\{1,2\},3\}$. Alors

   ☐ **a.** 1 appartient à E ☐ **b.** $\{1\}$ est inclus dans E
   ☐ **c.** $\{1,2\}$ appartient à E ☐ **d.** $\{1,2\}$ est inclus dans E

2. Si E est un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de ses parties, on a toujours

   ☐ **a.** $E \subset \mathcal{P}(E)$ ☐ **b.** $E \in \mathcal{P}(E)$
   ☐ **c.** $\{E\} \in \mathcal{P}(E)$ ☐ **d.** $E \cap \mathcal{P}(E)$ est non vide

Opérations élémentaires

1. Soit E, F, G trois ensembles. Alors $E \cap (F \cup G)$ vaut

   ☐ **a.** $(E \cup F) \cap (E \cup G)$ ☐ **b.** $(E \cap F) \cup (E \cap G)$ ☐ **c.** $(E \cap F) \cup G$ ☐ **d.** $(E \cap F) \cap (E \cap G)$

2. Soit E, F, G, H quatre ensembles tels que $E \subset G$ et $F \subset H$. Laquelle des inclusions suivantes n'est pas vérifiée ?

   ☐ **a.** $(E \cap F) \subset (G \cap H)$ ☐ **b.** $(E \cup F) \subset (G \cup H)$
   ☐ **c.** $(E \setminus F) \subset (G \setminus H)$ ☐ **d.** $(E \times F) \cap (G \times H)$

Application

Définition, exemples

1. Si f est une application de E dans F et si A est une partie de F, alors l'ensemble $f^{-1}(A)$ est

   ☐ **a.** $\{x \in E \mid f(x) \in A\}$ ☐ **b.** $\left\{f^{-1}(x) : x \in a\right\}$ ☐ **c.** $A \cap F$ ☐ **d.** $A \cap E$

2. Soit f une application de E dans F. Quelle condition est nécessaire pour que la fonction $f \circ f$ soit définie ?

   ☐ **a.** $E = F$ ☐ **b.** $f(E) \subset E$ ☐ **c.** $f(E) \subset F$ ☐ **d.** $f^{-1}(F) \subset E$

Application injective, surjective, bijective

1. Soit f une application de E dans E. Laquelle des conditions suivantes n'est pas suffisante pour affirmer que f est injective ?

   ☐ **a.** f est bijective ☐ **b.** $f \circ f$ est bijective ☐ **c.** $f \circ f$ est injective ☐ **d.** $f \circ f$ est surjective

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et g la restriction de f à $[0, +\infty[$. On peut dire que

   ☐ **a.** si f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors g est surjective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$
   ☐ **b.** si f est surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors g est surjective de $[0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$
   ☐ **c.** si f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors g est surjective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$
   ☐ **d.** si f est injective, alors g est injective

3. Laquelle des fonctions suivantes établit une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?

   ☐ **a.** $x \mapsto \mathrm{e}^x$ ☐ **b.** $x \mapsto x^2$ ☐ **c.** $x \mapsto x^3$ ☐ **d.** $x \mapsto |x|$

4. Si f et g sont deux bijections de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, quelle est la bijection réciproque de $g \circ f$?

   ☐ **a.** $g^{-1} \circ f^{-1}$ ☐ **b.** $f^{-1} \circ g^{-1}$ ☐ **c.** $g^{-1} + f^{-1}$ ☐ **d.** $f^{-1} \times g^{-1}$

Familles

1. Que vaut la réunion suivante : $\cup_{n\geqslant 1}\left[1, 1+\frac{1}{n}\right[$?

☐ **a.** $\{1\}$ ☐ **b.** $[1, 2[$ ☐ **c.** $]1, 2[$ ☐ **d.** $[1, 2]$

Relation binaire

1. Parmi les relations binaires suivantes, laquelle n'est pas réflexive ?

☐ **a.** le parallélisme, sur l'ensemble des droites du plan
☐ **b.** l'orthogonalité, sur l'ensemble des droites du plan
☐ **c.** la divisibilité, sur l'ensemble des entiers naturels non nuls
☐ **d.** l'égalité, dans $\mathbb{R}$

Relation d'ordre

1. Dans lequel des ensembles ordonnés suivants existe-t-il des parties non vides et non minorées ?

☐ **a.** $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel ☐ **b.** $\mathbb{N}^*$ muni de la divisibilité
☐ **c.** $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ muni de l'inclusion ☐ **d.** $]0, +\infty[$ muni de l'ordre usuel

Relation d'équivalence

L'ensemble des entiers naturels

Récurrence

Définition par récurrence

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} \coloneqq u_n + 1/u_n$. Alors, on peut montrer par récurrence sur n que

☐ **a.** u_n est rationnel ☐ **b.** $u_n > 0$ ☐ **c.** $u_n \leqslant u_{n+1}$ ☐ **d.** $u_n \leqslant nu_1$

2.7 Exercices

Éléments de logique

Assertion, prédicat

Implication, équivalence

Exercice 1 : Phrases mathématiques

On considère les propositions

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [(\forall y \in \mathbb{R}, \quad xy = 0) \Longrightarrow x = 0]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad [xy = 0 \Longrightarrow x = 0]$.

Sont-elles vraies ou fausses ? Bien entendu, on justifiera.

Exercice 2 : Quantificateurs

Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes, où (u_n) désigne une suite réelle et f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La suite u est majorée.
2. La suite u n'est pas majorée.
3. La fonction f est nulle.
4. La fonction f n'est pas nulle.
5. La fonction f n'est pas croissante.
6. La fonction f est périodique.
7. La fonction f n'est pas périodique.
8. La fonction f n'est pas paire.
9. La fonction f n'est pas bornée.

Exercice 3 : Autour des suites

Soit (u_n) une suite réelle. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes

1. $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant A$.
2. $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n > A$.

Que signifient ces énoncés ?

Ensemble

Ensemble, élément

Opérations élémentaires

Exercice 4 : Ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer que
$$A \cap B = A \cup B \Longrightarrow A = B.$$
2. Montrer que
$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

Exercice 5 : Ensembles

Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que les 3 assertions suivantes sont deux à deux équivalentes.

— $A \setminus B \subset C$.
— $A \setminus C \subset B$.
— $A \subset B \cup C$.

Exercice 6 : Équation ensembliste

Soit A, B deux parties de E.

1. On souhaite résoudre l'équation $A \cup X = B$ pour $X \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que si l'équation admet au moins une solution, alors $A \subset B$.
   (b) Montrer que si $A \subset B$, l'ensemble des solutions de l'équation est
   $$\{(B \setminus A) \cup T : T \in \mathcal{P}(A)\}.$$
   (c) Conclure.
2. On souhaite résoudre l'équation $A \cap X = B$ pour $X \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que si l'équation admet au moins une solution, alors $B \subset A$.
   (b) Montrer que si $B \subset A$, l'ensemble des solutions de l'équation est
   $$\left\{B \cup T : T \in \mathcal{P}(\bar{A})\right\}.$$
   (c) Conclure.

Exercice 7 : Équation ensembliste

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Discuter et résoudre l'équation

$$(A \cap X) \cup (B \cap X^c) = \varnothing.$$

Application

Définition, exemples

Exercice 8 : Différence symétrique

Soit E un ensemble. Quels que soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la différence symétrique $A \Delta B$ entre A et B par

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Déterminer $A \Delta B$ dans les deux exemples suivants.
   — $E := \{1, 2, 3, 4\}$, $A := \{1, 2\}$, $B := \{1, 3\}$.
   — $E := \mathbb{R}$, $A :=]-\infty, 2]$, $B := [1, +\infty[$.
2. Montrer que
   $$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right).$$
3. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$
   $$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$
4. En déduire que la loi Δ est associative sur $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire que
   $$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

Application injective, surjective, bijective

Exercice 9 : Fonction de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$

Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z - \dfrac{1}{z} \end{array}$$

1. Montrer que f est surjective mais non injective.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathrm{i}\mathbb{R})$.
3. Déterminer $f(\mathbb{U})$.

Exercice 10 : Fonction de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$

Soit f la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u,v) & \longmapsto & \left(u^2+v^2, uv\right) \end{array}$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer les antécédents de $(3-2\mathrm{i}, 3+\mathrm{i})$ par f.

Exercice 11 : Injection, surjection

Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$.

1. Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et que f est injective, alors g est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f \circ g = g$ et que g est surjective, alors f est injective.

Exercice 12 : Image directe, image réciproque

Soit $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que

$$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

Exercice 13 : Une bijection de $[0,1]$ dans $]0,1[$

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to]0,1[$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

est une bijection.

Exercice 14 : Application ensembliste

Soit A et B deux parties de E et

$$f: \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
3. On suppose que f est bijective. Calculer f^{-1}.

Exercice 15 : Application fonctionnelle

Soit f une application de E dans E et φ l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E,E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,E) \\ g & \longmapsto & g \circ f. \end{array}$$

Montrer que φ est bijective si et seulement si f l'est.

Exercice 16 : Haskell Curry

Soit A, B, C trois ensembles. Montrer que l'application

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A \times B, C) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B,C)) \\ f & \longmapsto & \varphi(f): \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{F}(B,C) \\ a & \longmapsto & [\varphi(f)](a): \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ b & \longmapsto & f(a,b) \end{array} \end{array} \end{array}$$

est bijective.

Exercice 17 : Il n'y a pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$

Montrons que si E est un ensemble, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une surjection φ de E dans $\mathcal{P}(E)$. Conclure a une absurdité en considérant

$$A \coloneqq \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Exercice 18 : Composition, injection et surjection

1. Soit A, B, C, D quatre ensembles, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ trois applications telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.
2. Soit X, Y, Z trois ensembles et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to X$ trois applications. On forme les applications composées $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$. On suppose que deux d'entre elles sont surjectives et la troisième injective. Montrer qu'alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 19 : Inversion à droite, à gauche d'une application

Soit f une application de A dans B.

1. (a) Montrer que f est surjective si et seulement si il existe une application g de B dans A telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.
   (b) Dans le cas où f est surjective, montrer que g est unique si et seulement si f est bijective.
2. (a) Montrer que f est injective si et seulement si il existe une application g de B dans A telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.
   (b) Dans le cas où f est injective, montrer que g est unique si et seulement si f est bijective.

Exercice 20 : Image directe et réciproque

Soit f une application de A dans B.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si quelle que soit la partie Y de B, on a $f(f^{-1}(Y)) = Y$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si quelle que soit la partie X de A, on a $f^{-1}(f(X)) = X$.

Exercice 21 : Application

Soit E un ensemble et f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 22 : Application

Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans E. On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Familles

Exercice 23 : Partition

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, 3\}$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $A_i \coloneqq \{f \in E \mid f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E.

Relation binaire

Relation d'ordre

Exercice 24 : Ordre sur $\mathbb{N}^*$

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad n\mathcal{R}m \iff [\exists q \in \mathbb{N}^*, \quad m = n^q].$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Est-ce que $\mathcal{R}$ est totale ?

Exercice 25 : Plus grand, plus petit élément

Montrer que si E est un ensemble ordonné dont l'ordre est total, toute partie finie de E admet un plus petit et un plus grand élément. Que dire si l'ordre n'est pas total ?

Exercice 26 : Applications croissantes

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Une application f de E dans E est dite croissante lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad x \preceq y \Longrightarrow f(x) \preceq f(y).$$

1. Montrer que la composée de deux applications croissantes est croissante.
2. Montrer que si E est totalement ordonné, l'application réciproque d'une bijection croissante est croissante.

Relation d'équivalence

Exercice 27 : Relation sur $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x = y^2 - 2y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 28 : Factorisation canonique

Soit f une application de A dans B et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur A par

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1\mathcal{R}x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que les classes d'équivalence sont les images réciproques des $\{y\}$ pour $y \in f(A)$.

On appelle ensemble quotient $A/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.

3. Soit s l'application de A dans $A/\mathcal{R}$ qui à x associe la classe de x. Montrer que s est une surjection appelée surjection canonique.
4. Soit i l'application de $f(A)$ dans B qui à y associe y. Montrer que i est une injection appelée injection canonique.
5. Montrer qu'il existe une et une seule application $\bar{f}$ de $A/\mathcal{R}$ dans $f(A)$ telle que $f = i \circ \bar{f} \circ s$. Montrer que $\bar{f}$ est une bijection.
6. Soit C un ensemble et g une application de A dans C. Montrer qu'il existe une application $\bar{g}$ de $A/\mathcal{R}$ dans C telle que $g = \bar{g} \circ s$ si seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1\mathcal{R}x_2 \Longrightarrow g(x_1) = g(x_2).$$

L'ensemble des entiers naturels

Récurrence

Exercice 29 : Inégalité

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

Exercice 30 : Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 \coloneqq 0, \quad F_1 \coloneqq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} \coloneqq F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \geqslant n - 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \quad \text{et} \quad F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2.$$

Exercice 31 : Inégalité sur Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 := 1, \quad F_1 := 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n.$$

Déterminer les $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \leqslant \alpha r^n.$$

Exercice 32 : Inégalité

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Exercice 33 : Injections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Déterminer les injections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \leqslant n.$$

Exercice 34 : Équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) + (f \circ f)(n) = 2n.$$

1. Déterminer une fonction vérifiant (E).
2. Réciproquement, soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant (E).
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n$. Conclure.

Exercice 35 : Équation fonctionnelle

Montrer qu'il existe une unique bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(n) - n| = 1.$$

Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$?

Exercice 36 : Les crayons de couleur

Nous allons démontrer que toute boite de crayons de couleur ne possède que des crayons de la même couleur. Pour cela, on procède par récurrence sur le nombre n de crayons. L'initialisation est évidente car une boite ne contenant qu'un crayon ne possède que des crayons de la même couleur. Pour l'hérédité, supposons que le résultat est vrai pour n crayons et considérons une boite de $n + 1$ crayons de couleur. On enlève le premier crayon. Par hypothèse de récurrence, tous les autres crayons ont la même couleur. On replace le premier crayon et on enlève le dernier crayon. De même, tous les autres crayons ont la même couleur. On en déduit que les $n+1$ crayons ont la même couleur.

Quelle est l'erreur de ce raisonnement ?

Exercice 37 : Les Moines

Dans un camp de bouddhistes, on apprend qu'il y a au moins un malade. Cette maladie n'est pas contagieuse ni évolutive (le nombre de malades n'évoluera plus). Afin de préserver une entière pureté et ne pas perturber les méditations, un bouddhiste qui se sait malade doit partir. Cette maladie se caractérise uniquement par une tâche rouge sur le front. Un symptôme qui leur permet de reconnaître sans hésitation si une personne est malade. Le problème est qu'il n'y a aucun moyen pour un bouddhiste de se voir. Il n'y a aucun miroir ou autre moyen permettant de voir son propre front. De plus, les moines bouddhistes ont fait le vœu de silence et ne communiquent d'aucune façon. Ils ne font que méditer, lire et ont un esprit très logique. Ils se réunissent tous une seule fois par jour au lever du soleil pour une méditation commune de 3 heures. Pendant ces trois heures, ils n'ont toujours pas le droit de communiquer entre eux ni de partir avant la fin de la séance commune. Au bout de 5 jours, tous les malades sont partis. Combien y avait-il de moines malades ?

Définition par récurrence

Exercice 38 : Suite définie par récurrence

Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1}} + u_n\right].$$

Chapitre 3

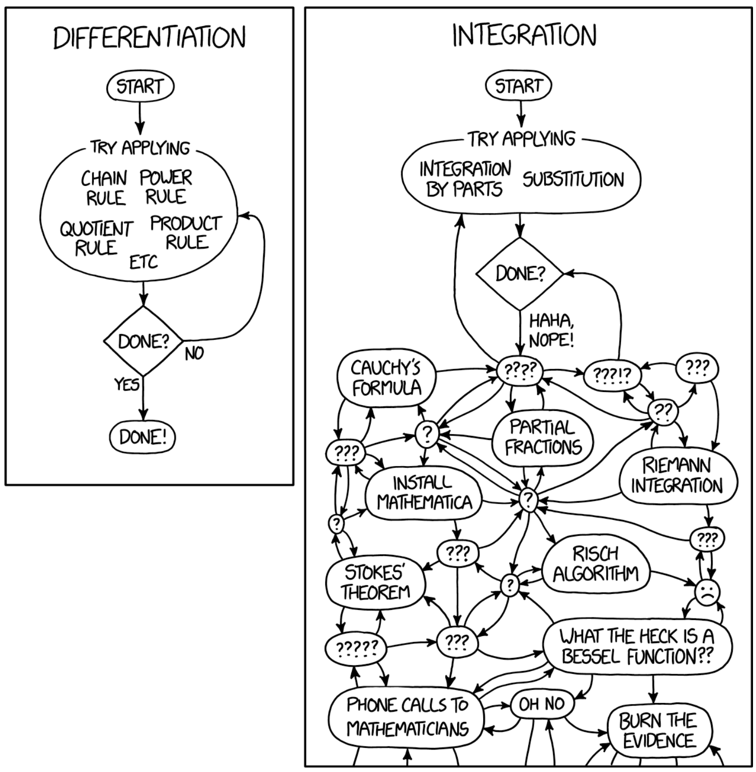
Compléments d'analyse

« Le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et on pourrait le résumer en trois mots : majorer, minorer, approcher. »

— Jean Dieudonné (1906–1992)

« Les hommes sont comme les chiffres, ils n'acquièrent de valeur que par leur position. »

— Napoléon Bonaparte (1769–1821)



3.1 Le corps ordonné $\mathbb{R}$

3.1.1 La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Proposition 3.1.1

La relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes.

— Elle est totale.
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad \text{ou} \quad b \leqslant a.$$
— Elle est compatible avec l'addition.
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad a + c \leqslant b + c.$$
— Elle est compatible avec la multiplication.
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad [0 \leqslant a \quad \text{et} \quad 0 \leqslant b] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ab.$$

Remarques

⇨ Si $a, b \in \mathbb{R}$, la négation de « $a \leqslant b$ » est « $a > b$ ».
⇨ La relation $\leqslant$ étant antisymétrique sur $\mathbb{R}$, 0 est le seul réel à la fois positif et négatif.
⇨ Deux réels a et b sont de même signe si et seulement si $ab \geqslant 0$. On dit qu'ils sont de même signe au sens strict lorsque $ab > 0$.
⇨ Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$.

Exercices 1

⇨ Soit a, b deux réels positifs. Montrer que
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$
⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Montrer que $a = b = c$.

Proposition 3.1.2

$$\begin{aligned}
\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d] \quad \Longrightarrow \quad a + c \leqslant b + d \\
\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad & [a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c] \quad \Longrightarrow \quad ac \leqslant bc \\
\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad & [0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ac \leqslant bd \\
\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad & 0 \leqslant a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant a^n \leqslant b^n.
\end{aligned}$$

Remarque

⇨ On peut multiplier une inégalité de signe quelconque par un réel négatif. Dans ce cas, l'inégalité change de sens.

Exercice 2

⇨ L'assertion suivante est-elle vraie ?

$$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad [a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d] \Longrightarrow ac \leqslant bd$$

Proposition 3.1.3

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$0 < a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}.$$

Proposition 3.1.4

$$\begin{aligned}
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, &\quad [a \leqslant b \quad \text{et} \quad c < d] \quad \Longrightarrow \quad a+c < b+d \\
\forall a,b,c \in \mathbb{R}, &\quad [a < b \quad \text{et} \quad 0 < c] \quad \Longrightarrow \quad ac < bc \\
\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}, &\quad [0 \leqslant a < b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c < d] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant ac < bd \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, &\quad 0 \leqslant a < b \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant a^n < b^n.
\end{aligned}$$

Définition 3.1.5

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. On définit

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, &]a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
]a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}, & [a,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}, \\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}, &]a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}, &]-\infty,b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.
\end{aligned}$$

3.1.2 Valeur absolue

Définition 3.1.6

Pour tout réel a, on définit sa *valeur absolue*, notée $|a|$ par

$$|a| := \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 = |a|^2$.

⇨ Si a et b sont deux réels, on définit la distance de a à b, notée $\mathrm{d}(a,b)$ par

$$\mathrm{d}(a,b) := |a-b|.$$

Exercice 3

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\min(a,b)$ et $\max(a,b)$ à l'aide de a, b et de la valeur absolue.

Proposition 3.1.7

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathbb{R}, &\quad |a| \geqslant 0 \\
\forall a \in \mathbb{R}, &\quad |a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \\
\forall a \in \mathbb{R}, &\quad |-a| = |a| \\
\forall a,b \in \mathbb{R}, &\quad |ab| = |a|\,|b|.
\end{aligned}$$

Remarques

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $|a^n| = |a|^n$. Si de plus $a \neq 0$, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $|a^n| = |a|^n$.

⇨ De cette proposition, on déduit les résultats suivants sur la distance entre deux réels.

$$\begin{array}{ll} \forall a, b \in \mathbb{R}, & \mathrm{d}(a,b) \geqslant 0 \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, & \mathrm{d}(a,b) = 0 \iff a = b \\ \forall a, b \in \mathbb{R}, & \mathrm{d}(b,a) = \mathrm{d}(a,b)\,. \end{array}$$

Exercice 4

⇨ Soit $a > 0$ et $x, y \geqslant a$. Montrer que

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}\,|x-y|\,.$$

Proposition 3.1.8

Soit a un réel. Alors

$$|a| = \max\{a, -a\}\,.$$

Remarques

⇨ En particulier, si M est un réel positif, pour montrer que $|a| \leqslant M$ il suffit de montrer que

$$a \leqslant M \quad \text{et} \quad -a \leqslant M.$$

⇨ Soit a un réel et M un réel positif. Alors

$$|a| \leqslant M \iff -M \leqslant a \leqslant M$$

$$|a| \geqslant M \iff [a \leqslant -M \quad \text{ou} \quad a \geqslant M]\,.$$

Exercice 5

⇨ Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos(x)\sin(y) \geqslant -1$.

Proposition 3.1.9

Soit a et b deux réels. Alors

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|\,.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si a et b sont de même signe.

Proposition 3.1.10

Soit a et b deux réels. Alors

$$\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b| \quad \text{et} \quad |a+b| \geqslant |a| - |b|\,.$$

Remarque

⇨ Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$. Alors

$$|\mathrm{d}(a,b) - \mathrm{d}(b,c)| \leqslant \mathrm{d}(a,c) \leqslant \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d}(b,c)\,.$$

Exercice 6

⇨ Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a-b| \leqslant |a| - |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 \leqslant b^2 \iff |a| \leqslant |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a-b| \leqslant |a| + |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \Longrightarrow |a| \leqslant |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a-b| \geqslant |a| - |b|$.
— $\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad |a| \leqslant |b| + |b-a|$.

Proposition 3.1.11

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,.$$

Exercice 7

⇨ Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(\theta_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| .$$

3.1.3 Racine

Définition 3.1.12

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si n est pair et $a \geqslant 0$, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = a$. On le note $\sqrt[n]{a}$.

— Si n est impair, il existe un unique réel x tel que $x^n = a$. On le note $\sqrt[n]{a}$.

Remarques

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si n est pair et $a \geqslant 0$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt[n]{a}$$

— Si n est pair et $a < 0$, l'équation $x^n = a$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.

— Si n est impair, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^n = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si n est pair

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$$
$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \sqrt[n]{a^n} = |a| .$$

— Si n est impair

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a,$$
$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si n est pair

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x^n \leqslant y^n \quad \Longleftrightarrow \quad |x| \leqslant |y| .$$

— Si n est impair

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x^n \leqslant y^n \quad \Longleftrightarrow \quad x \leqslant y.$$

Proposition 3.1.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si n est pair

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

— Si n est impair

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$$

3.1.4 Partie entière, approximation

Proposition 3.1.14

$\mathbb{R}$ possède la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad n\varepsilon \geqslant x.$$

On dit que $\mathbb{R}$ est *archimédien*.

Remarque

⇨ En particulier, si on note x le volume d'eau de l'océan et ε le volume que peut contenir une petite cuillère, l'archimédisme de $\mathbb{R}$ nous permet de montrer qu'une personne (patiente) arrivera à vider l'océan à l'aide de cette petite cuillère.

Définition 3.1.15

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n \leqslant x < n+1.$$

Cet entier est appelé *partie entière* de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

Remarques

- ⇨ Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, $\lfloor a/b \rfloor$ est le quotient de la division euclidienne de a par b.
- ⇨ Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$.
- ⇨ On définit de même la partie entière supérieure de $x \in \mathbb{R}$, notée $\lceil x \rceil$, comme l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n-1 < x \leqslant n$. Si x est entier, alors $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$. Sinon, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercices 8

- ⇨ Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- ⇨ Montrer que la partie entière est une fonction croissante.
- ⇨ Soit $\alpha \in [0, 1[$. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \alpha < \frac{n}{n+1}.$$

Définition 3.1.16

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On appelle *valeur approchée* de a à la précision ε tout réel b tel que $|a-b| \leqslant \varepsilon$. Si $b \leqslant a$ (respectivement $b \geqslant a$), on dit que b est une valeur approchée de a par *défaut* (respectivement, par *excès*).

Remarques

- ⇨ On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels. $\mathbb{Q}$ est stable par les opérations usuelles d'addition, de soustraction, de multiplication et de division.

Définition 3.1.17

On dit qu'un réel a est *décimal* lorsqu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$a = m \cdot 10^{-n}.$$

Remarques

- ⇨ Un nombre décimal est rationnel. Cependant $1/3$ est rationnel, mais n'est pas décimal.
- ⇨ L'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres décimaux est stable par les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, mais pas par division.

Proposition 3.1.18

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $d = \lfloor 10^n a \rfloor \cdot 10^{-n} \in \mathcal{D}$ est une approximation par défaut de a à la précision 10^{-n}.

3.1.5 Intervalle

Définition 3.1.19

On appelle *droite numérique achevée* et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre totale en prolongeant la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$ et en posant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Remarque

- ⇨ On prolonge aussi de manière naturelle l'addition et la multiplication sans toutefois définir $(+\infty) - (+\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$.

Définition 3.1.20

On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est un *intervalle* lorsqu'elle est de la forme

$$\varnothing, \qquad \mathbb{R}, \qquad [a,b]\,, \qquad]a,b[\,, \qquad [a,b[\,, \qquad]a,b]\,,$$

$$[a,+\infty[\,, \qquad]a,+\infty[\,, \qquad]-\infty,b]\,, \qquad]-\infty,b[$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarques

- ⇨ En particulier, pour $a = b$, $[a,b] = \{a\}$ est un intervalle. On dit qu'un intervalle est *non trivial* lorsqu'il contient au moins 2 points.
- ⇨ Si I est un intervalle non vide, il existe un unique couple $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tel que $I = [a,b]$, $I =]a,b]$, $I = [a,b[$ ou $I =]a,b[$. On dit que a et b sont les *extrémités* de I. L'intervalle I est dit *ouvert* lorsqu'il ne contient pas ses extrémités c'est-à-dire lorsqu'il est vide, ou qu'il est de la forme $]a,b[$ où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.
- ⇨ Dans ce cours, une partie de $\mathbb{R}$ notée I ou J sera implicitement un intervalle.

3.2 Fonction réelle d'une variable réelle

3.2.1 Définition

Définition 3.2.1

On appelle *fonction réelle* toute fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarques

- ⇨ Il sera essentiel de ne pas confondre une fonction avec son expression. Par exemple parler de la fonction $\sin x$ est une erreur grave. On parlera plutôt de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui au réel x associe le réel $\sin x$.
- ⇨ Par abus de langage, il est courant que les énoncés demandent à l'élève de donner le domaine de définition d'une fonction donnée par une expression (par exemple $\sqrt{x}$). Dans ce cas, il faut donner l'ensemble $\mathcal{D}$ des x pour lesquels cette expression à un sens (ici, $\mathbb{R}_+$). La fonction f sera alors la fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$, qui à x associe cette expression en x.

Exercice 9

- ⇨ Déterminer le domaine de définition de la fonction d'expression

$$f(x) \coloneqq \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Définition 3.2.2

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.

— Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\lambda f + \mu g$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)(x) \coloneqq \lambda f(x) + \mu g(x).$$

— On définit la fonction fg par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)(x) \coloneqq f(x)g(x).$$

— Si f ne s'annule en aucun point de $\mathcal{D}$, on définit $1/f$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) \coloneqq \frac{1}{f(x)}.$$

3.2.2 Symétries

Définition 3.2.3

Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ *symétrique par rapport à 0*, c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad -x \in \mathcal{D}.$$

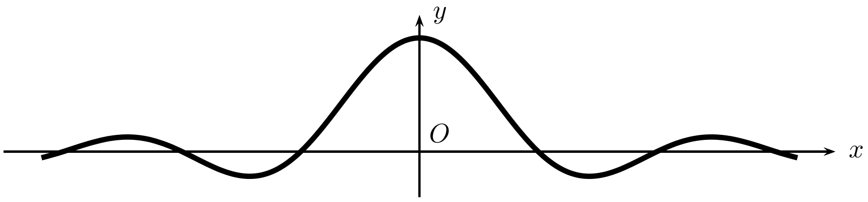
On dit que

— f est *paire* lorsque
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = f(x).$$

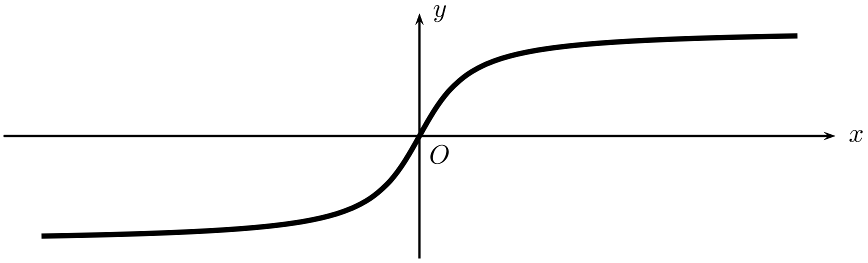
— f est *impaire* lorsque
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(-x) = -f(x).$$

Remarques

⇨ Si f est paire, la droite (Oy) est un axe de symétrie du graphe de f.



⇨ Si f est impaire, O est un centre de symétrie du graphe de f.



⇨ Si f est paire ou impaire, pour étudier f, il suffit d'étudier sa restriction à $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$.

Exercice 10

⇨ Montrer que la fonction d'expression
$$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
est impaire.

Définition 3.2.4

Soit $T \in \mathbb{R}$ et f une fonction dont le domaine de définition vérifie
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad x + T \in \mathcal{D} \quad \text{et} \quad x - T \in \mathcal{D}$$

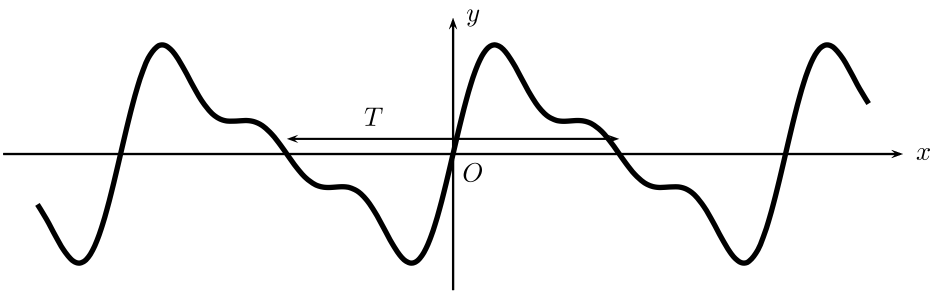
On dit que f est T-*périodique*, ou que T est une *période* de f, lorsque
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f\left(x+T\right) = f(x).$$

Lorsque f admet une période non nulle, on dit que f est *périodique*.

Remarques

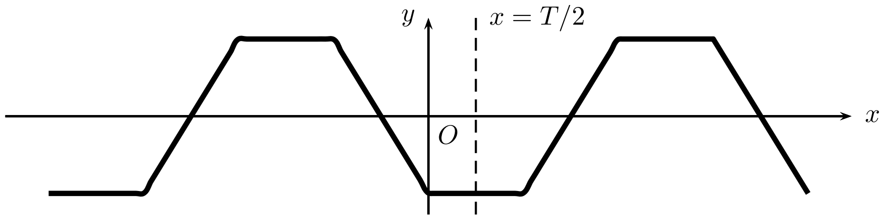
⇨ Si f est T-périodique, alors
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+kT) = f(x).$$

⇨ Si f est T-périodique, la translation de vecteur $T\overrightarrow{e_1}$ laisse stable le graphe de f.



Pour étudier f, il suffit d'étudier sa restriction à $\mathcal{D} \cap [a, a+T]$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$.

⇨ S'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que $f(T - x) = f(x)$, la droite d'équation $x = T/2$ est un axe de symétrie du graphe de f.



Exercices 11

⇨ La fonction
$$f(x) := \sin(2x) + \cos\left(\frac{x}{3}\right)$$
est-elle périodique ?

⇨ Montrer que le graphe de la fonction
$$f(x) := \ln\left(x^2 + x + 1\right)$$
admet un axe de symétrie.

⇨ Tracer le graphe d'une fonction quelconque f, puis celui des fonctions
$$x \mapsto f(x) + a, \qquad x \mapsto f(x + a), \qquad x \mapsto f(a - x), \qquad x \mapsto f(ax), \qquad x \mapsto af(x).$$

Proposition 3.2.5

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et f une bijection de A dans B. Alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice des axes $[Ox)$ et $[Oy)$.

3.2.3 Monotonie

Définition 3.2.6

Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. On dit que

— f est *croissante* lorsque
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

— f est *décroissante* lorsque
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y).$$

— f est *strictement croissante* lorsque
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

— f est *strictement décroissante* lorsque
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

Remarques

⇨ Les fonctions constantes sont les seules fonctions qui sont à la fois croissantes et décroissantes.

⇨ Une fonction peut n'être ni croissante, ni décroissante. C'est le cas de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

⇨ Si f est strictement monotone, elle est injective.

⇨ Attention, il est possible que f soit croissante sans que
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow x \leqslant y.$$
C'est notamment le cas des fonctions constantes qui sont croissantes mais pour lesquelles $f(x) \leqslant f(y)$ quelle que soit la position de x par rapport à y. Cependant, si f est strictement croissante, par contraposée, on a bien
$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow x \leqslant y.$$

⇨ D'après la remarque précédente, si f est strictement croissante et $x_0 \in \mathcal{D}$ est un zéro de f, pour placer $x \in \mathcal{D}$ par rapport à x_0, il suffit de déterminer le signe de $f(x)$.

⇨ Les effets des opérations usuelles sur les propriétés de monotonie sont résumés dans les tableaux ci-dessous.

— *Combinaison linéaire positive*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— *Produit de fonctions positives*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— *Inverse d'une fonction strictement positive ou strictement négative*

f	croissante	décroissante
1/f	décroissante	croissante

— *Composition*

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	décroissante
décroissante	décroissante	croissante

Lorsque c'est possible, il est souvent bien plus judicieux de déterminer la monotonie d'une fonction à partir de ces règles plutôt qu'à partir de l'étude du signe de la dérivée. En effet, cette méthode est bien plus rapide et source de beaucoup moins d'erreurs.

Exercices 12

⇨ Montrer que la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

n'est ni croissante, ni décroissante.

⇨ Déterminer la monotonie des fonctions d'expressions

$$\frac{1}{e^x + \sqrt{1+x}}, \qquad \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$$

3.2.4 Fonction majorée, minorée, bornée

Définition 3.2.7

On dit qu'une fonction réelle f est

— *majorée* lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant M.$$

— *minorée* lorsque

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \geqslant m.$$

Exercice 13

⇨ Montrer que la fonction d'expression xe^{-x} est majorée sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.2.8

On dit qu'une fonction réelle ou complexe f est *bornée* lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Exercice 14

⇨ Montrer que la fonction d'expression $\frac{x}{1+x^2}$ est bornée par $1/2$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.2.9

Une fonction réelle est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.

Définition 3.2.10

Soit f et g deux fonctions de domaine $\mathcal{D}$. On dit que f est inférieure à g et on note $f \leqslant g$ lorsque

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Remarques

➾ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$. Elle n'est pas totale.

➾ La négation de $f \leqslant g$ s'écrit

$$\exists x \in \mathcal{D}, \quad f(x) > g(x).$$

3.3 Fonction continue, fonction dérivable

3.3.1 Limite

Dans ce chapitre, on ne définira pas précisément la notion de limite. On se basera sur la définition intuitive suivante.

Définition 3.3.1

Étant donné une fonction f et $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a, lorsque, quitte à rendre x proche de a, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on souhaite de l. Dans ce cas, on note

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Proposition 3.3.2

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f, g deux fonctions telles que $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers l_f et $l_g \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Alors

— Si λ et μ sont deux réels
$$\lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l_f + \mu l_g.$$

— On a
$$f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_f l_g.$$

— Si $l_f \neq 0$
$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{l_f}.$$

— Plus généralement, si $l_g \neq 0$
$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{l_f}{l_g}.$$

Proposition 3.3.3

Soit f et g deux fonctions. On suppose que $f(x)$ tend vers $l_f \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et que $g(x)$ tend vers $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers l_f. Alors $g(f(x))$ tend vers l_g lorsque x tend vers a.

Remarque

➾ De nombreuses autres règles existent mélangeant limites finies et infinies. Elles sont résumées dans les tableaux ci-dessous où la présence d'une croix représente une forme indéterminée.

— *Somme*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f + g$

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$
$l_f \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l_f + l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— *Opposé*
Si f est une fonction admettant pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $-f$

l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
	$+\infty$	$-l$	$-\infty$

— *Multiplication par un scalaire*
Si f est une fonction admettant pour limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf

λ \ l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	λl	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	λl	$+\infty$

— *Produit*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$, alors fg

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	$-\infty$	$-\infty$
$l_f < 0$	$+\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$-\infty$
$l_f = 0$	$\times$	0	0	0	$\times$
$l_f > 0$	$-\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— *Inverse*
Si f est une fonction admettant pour limite l, alors $1/f$

l	$-\infty$	$l < 0$	0^-	0	0^+	$l > 0$	$+\infty$
	0	$1/l$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$1/l$	0

— *Exponentiation*
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g, avec f strictement positive, alors f^g

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	0	0
$0 < l_f < 1$	$+\infty$	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	0
1	$\times$	1	1	1	$\times$
$1 < l_f$	0	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

Exercice 15

⇨ Déterminer les limites en 0 de x^x et $x^{\frac{1}{\ln x}}$; en déduire que « 0^0 » est une forme indéterminée. De même, déterminer la limite en $+\infty$ de $(1+1/x)^x$; en déduire que « $1^{+\infty}$ » est une forme indéterminée.

3.3.2 Continuité

Définition 3.3.4

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est *continue* en $x_0 \in \mathcal{D}$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

On dit que f est continue lorsque, quel que soit $x_0 \in \mathcal{D}$, f est continue en x_0.

Proposition 3.3.5: Théorèmes usuels

Soit $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors
— Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue.
— La fonction fg est continue.
— Si g ne s'annule pas, f/g est continue.

Proposition 3.3.6: Théorèmes usuels

La composée de deux fonctions continues est continue.

Théorème 3.3.7: Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. Si $y_0 \in$ « $[f(a), f(b)]$ », il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Théorème 3.3.8: Théorème de la bijection

— Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$) une fonction continue, strictement croissante. Alors

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

De plus f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Autrement dit, pour tout $y \in [f(a), f(b)]$, il existe un unique $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

— Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ (où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a < b$) une fonction continue, strictement croissante. On pose

$$l_a := \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{et} \quad l_b := \lim_{x \to b} f(x).$$

Alors

$$f\left(]a, b[\right) = \left]l_a, l_b\right[.$$

De plus f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $]l_a, l_b[$. Autrement dit, pour tout $y \in]l_a, l_b[$, il existe un unique $x \in]a, b[$ tel que $y = f(x)$.

Remarques

⇨ Ce théorème reste valide dans de nombreuses autres situations, par exemple lorsque f est strictement décroissante et que son domaine de définition est un intervalle semi-ouvert. Par exemple, si $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, strictement décroissante, en posant

$$l := \lim_{x \to +\infty} f(x),$$

alors $f([a, +\infty[) =]l, f(a)]$ et f réalise une bijection de $[a, +\infty[$ sur $]l, f(a)]$.

⇨ Ce théorème permet de calculer $f(A)$ lorsque A est une réunion d'intervalles $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ sur lesquels f est continue et strictement monotone. Il suffit pour cela de remarquer que

$$f(A) = f(I_1) \cup \cdots \cup f(I_n).$$

Proposition 3.3.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I. D'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $J := f(I)$. De plus

— f^{-1} est strictement monotone, de même sens de variation que f.

— f^{-1} est continue.

3.3.3 Dérivabilité

Définition 3.3.10

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est *dérivable* en x_0 lorsque

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Dans ce cas, on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle *nombre dérivé* de f en x_0. On dit que f est dérivable lorsqu'elle est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

Remarques

⇨ Si f est dérivable en x_0, la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est tangente au graphe de f en x_0.

⇨ Lorsque

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty,$$

le graphe de f admet une tangente verticale en x_0. Une telle fonction n'est pas dérivable en x_0.

⇨ On dit qu'une fonction f est dérivable à gauche en x_0 lorsque l'expression

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 par la gauche. Si tel est le cas, cette limite est notée $f'_g(x_0)$. On définit de même la notion de dérivabilité à droite. Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

⇨ Si f et g sont des fonctions telles qu'en x_0, $f(x_0) = g(x_0)$, on ne peut rien en conclure sur $f'(x_0)$ et $g'(x_0)$. En particulier, il est absurde de dire que parce que $f(x_0) = 0$, on peut en déduire que $f'(x_0) = 0$. On dira qu'on peut dériver des identités, mais pas des égalités.

Proposition 3.3.11

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Remarque

⇨ La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais qui n'est pas dérivable en 0.

Exercice 16

⇨ Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} ax+b & \text{si } x < 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

soit dérivable en 0.

Définition 3.3.12

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des $x_0 \in \mathcal{D}$ en lesquels f est dérivable. On définit la *fonction dérivée* de f, notée f' par

$$f' : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x). \end{array}$$

Remarque

⇨ Les fonctions usuelles sont dérivables en tout point de leur ensemble de définition, excepté la fonction $x \mapsto |x|$ qui n'est pas dérivable en 0 et les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ qui ne sont pas dérivables en 0 pour $n \geqslant 2$.

$\mathcal{D}$	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}^*$	$\ln \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$\operatorname{cotan} x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$-\left(1 + \operatorname{cotan}^2 x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Proposition 3.3.13: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors

— Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

— La fonction fg est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

— Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $1/f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

— Plus généralement, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f/g est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Proposition 3.3.14: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si f et g sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

Remarque

⇨ En particulier, si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable et $n \in \mathbb{N}$, la fonction g définie sur $\mathcal{D}$ par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g(x) \coloneqq f(x)^n$$

est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g'(x) = nf'(x)f(x)^{n-1}.$$

⇨ Si $f(x) \coloneqq a(x)/b(x)^\alpha$, il est bon d'écrire $f(x)$ sous la forme $f(x) = a(x)b(x)^{-\alpha}$ avant de dériver f.

⇨ Attention, ce n'est pas parce que les théorèmes usuels ne peuvent pas s'appliquer en un point qu'on peut en conclure que la fonction n'y est pas dérivable.

Exercices 17

⇨ Montrer que la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire, T-périodique) est impaire (resp. paire, T-périodique).

⇨ Étudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions d'expression

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, \qquad \left(x^3 + 2x + 1\right)e^{x^2}, \qquad \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

⇨ Étudier la dérivablité et calculer la dérivée de la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) \coloneqq \sqrt{1 - \cos x}.$$

Proposition 3.3.15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I, dérivable et strictement monotone. Elle réalise donc une bijection de I sur l'intervalle $J \coloneqq f(I)$. On pose

$$A \coloneqq \{x \in I \mid f'(x) = 0\}.$$

Alors f^{-1} est dérivable en tout point de $J \setminus f(A)$ et

$$\forall y \in J \setminus f(A), \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

3.3.4 Dérivées successives

Définition 3.3.16

Si $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on définit par récurrence la *dérivée n-ième* de f de la manière suivante
- On pose $f^{(0)} := f$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{(n+1)}$ comme étant la dérivée de $f^{(n)}$.

Si $x_0 \in \mathcal{D}$, on dit que f est dérivable n fois en x_0 lorsque $f^{(n)}$ est définie en x_0. On dit que f est dérivable n fois lorsqu'elle est dérivable n fois en tout point de son domaine de définition.

Proposition 3.3.17

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables n fois.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x).$$
- fg est dérivable n fois.
- Si g ne s'annule pas, alors f/g est dérivable n fois.

Proposition 3.3.18

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$. Si f et g sont dérivables n fois, alors $g \circ f$ est dérivable n fois.

Définition 3.3.19

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsqu'elle est dérivable et que sa dérivée est continue.

Proposition 3.3.20

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- fg est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Si g ne s'annule pas, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 3.3.21

La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

3.3.5 Dérivation et monotonie

Proposition 3.3.22

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors
- f est croissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0.$$
- f est décroissante si et seulement si
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de définition de f n'est pas un intervalle. Par exemple la fonction
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$
n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée soit négative. Cependant ses restrictions aux intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont toutes les deux décroissantes.

Exercice 18

⇨ Montrer que

$$\forall x \in [0,1], \quad x \leqslant \left(1+\frac{x}{2}\right)\ln(1+x).$$

Proposition 3.3.23

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Remarque

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de f n'est pas un intervalle.

Proposition 3.3.24

Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Si
- $\forall x \in I, \quad f'(x) \geqslant 0$
- Le nombre de points de I où f' s'annule est fini.

alors f est strictement croissante.

Remarques

⇨ La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée s'annule en 0.

⇨ Une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante est constante sur un intervalle non trivial. Ces fonctions sont donc rares. Cependant, il est toujours plus délicat de montrer qu'une fonction est strictement croissante que croissante. Lorsqu'on a besoin de la stricte monotonie, il convient donc d'être particulièrement attentif. Inversement, il est inutile de prouver la stricte monotonie si seule la monotonie nous est utile.

Exercice 19

⇨ Combien de racines réelles possède le polynôme $P(x) := x^3 - 3x - 1$?

3.3.6 Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 3.3.25

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathcal{D}$. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Si c'est le cas, on définit le nombre dérivé de f en x_0 par

$$f'(x_0) := \mathrm{Re}(f)'(x_0) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(f)'(x_0).$$

On dit que f est dérivable lorsque f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}$.

Proposition 3.3.26: Théorèmes usuels

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables. Alors
- Quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x).$$
- La fonction fg est dérivable et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$
- Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $1/f$ est dérivable et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$
- Plus généralement, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f/g est dérivable et
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Proposition 3.3.27

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g(x) := \mathrm{e}^{f(x)}$$

est dérivable et

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad g'(x) = f'(x)\mathrm{e}^{f(x)}.$$

Proposition 3.3.28

Soit f une fonction complexe, dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = 0.$$

Remarque

⇨ On dit que'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque ses parties réelles et imaginaires le sont. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on montre qu'une combinaison linéaire, un produit, un quotient ainsi que l'exponentielle de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$.

3.4 Intégration, primitive

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.4.1 Primitive

Définition 3.4.1

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$. On appelle *primitive* de f toute fonction dérivable $F : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad F'(x) = f(x).$$

Proposition 3.4.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors les primitives de f sont les fonctions $F_C : I \to \mathbb{K}$ définies sur I par

$$\forall x \in I, \quad F_C(x) := F(x) + C$$

où $C \in \mathbb{K}$.

Remarque

⇨ Si la fonction d'expression $F(x)$ est une primitive de la fonction d'expression $f(x)$, on écrira

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x).$$

Il faudra rester vigilant avec cette notation. Par exemple

$$\int 1\,\mathrm{d}x = x \quad \text{et} \quad \int 1\,\mathrm{d}x = x + 1$$

mais $x \neq x + 1$. On ne l'utilisera donc que pour calculer des primitives et on s'abstiendra de toute lecture autre que de la gauche vers la droite. On s'abstiendra aussi de l'utiliser avec des inégalités.

3.4.2 Intégration et régularité

Proposition 3.4.3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On définit sur I la fonction F par

$$\forall x \in I, \quad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

En particulier, F est une primitive de f.

Proposition 3.4.4

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une primitive. Plus précisément, pour tout $x_0 \in I$, il existe une unique primitive F de f s'annulant en x_0. De plus

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 3.4.5: Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. Alors, si F est une primitive de f

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

3.4.3 Intégration et inégalité

Proposition 3.4.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles continues et $a, b \in I$. On suppose que

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad \left[\forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant g(x)\right].$$

Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.4.4 Intégration par parties, changement de variable

Proposition 3.4.7: Intégration par parties

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit G une primitive de g. Alors, si $a, b \in I$

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}} \overbrace{g(x)}^{\text{intègre}}\,\mathrm{d}x = \left[f(x)G(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 20

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n par

$$I_n := \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Calculer I_0 et trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Remarque

⇨ Si f est dérivable et que G est une primitive de g, alors

$$\int \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}} \overbrace{g(x)}^{\text{intègre}} \,\mathrm{d}x = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 3.4.8: Changement de variables

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Soit J un intervalle, $\bar{x} : J \to I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a_x, b_x \in I$ et $a_t, b_t \in J$ tels que

$$a_x = \bar{x}\left(a_t\right) \quad \text{et} \quad b_x = \bar{x}\left(b_t\right).$$

Alors

$$\int_{a_t}^{b_t} f(\bar{x}(t)) \frac{d\bar{x}}{dt}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_x}^{b_x} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 21

⇨ Calculer

$$\int_0^{\pi} \ln\left(1+\cos^2 x\right) \sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

3.4.5 Calcul de primitive

Étant donnée une fonction f définie sur un intervalle à partir d'une expression en les fonctions usuelles, on cherche une primitive F de f. Puisque f est une expression en les fonctions usuelles, elle est en particulier continue, donc admet une primitive. Le problème du calcul de primitive est d'expliciter une telle fonction.

Il est d'abord essentiel de connaitre par cœur les primitives des fonctions usuelles.

$\mathcal{D}$	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$

Ensuite, il existe de nombreuses techniques à connaitre pour calculer certaines primitives.

— **Polynômes**
  Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme se fait de manière immédiate

$$\int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) \mathrm{d}x = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

— **Polynômes-exponentielle**
  Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme-exponentielle, c'est-à-dire de

$$\int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right) \mathrm{e}^{cx}\,\mathrm{d}x$$

  se fait facilement par récurrence en effectuant une intégration par parties

$$\int \underbrace{\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)}_{\text{dérive}} \overbrace{\mathrm{e}^{cx}}^{\text{intègre}} \,\mathrm{d}x.$$

  De cette manière, on abaisse le degré du polynôme. Il suffit de réitérer le procédé jusqu'à faire disparaitre le terme polynomial.

Exercice 22

⇨ Calculer
$$\int (2x+3)\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.$$

— **Polynômes-sinus/cosinus**
On calcule de même toute primitive du produit d'une fonction polynôme et d'une fonction sinus ou cosinus.

Exercice 23

⇨ Calculer
$$\int x\cos x \,\mathrm{d}x.$$

— **Exponentielle-sinus/cosinus** Pour calculer des primitives de la forme
$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x \quad \text{ou} \quad \int \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x,$$
on passe par l'exponentielle complexe. On fait de même si un polynôme est en facteur d'une telle expression.

Exercice 24

⇨ Calculer
$$\int \mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\,\mathrm{d}x.$$

— **Polynôme-logarithme**
Le calcul d'une primitive d'une fonction polynôme-logarithme, c'est-à-dire de
$$\int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)\ln x \,\mathrm{d}x$$
se fait facilement par intégration par parties
$$\int \overbrace{\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)}^{\text{intègre}}\underbrace{\ln x}_{\text{dérive}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 25

⇨ Calculer
$$\int \ln x \,\mathrm{d}x$$

— **Polynômes en** sin **et** cos
Pour le calcul de primitives de polynômes en sin et cos, c'est-à-dire de :
$$\int \sin^n x\cos^m x\,\mathrm{d}x \quad \text{où } n, m \in \mathbb{N}$$
on peut, lorsque n ou m est impair effectuer un changement de variable pour se ramener à un calcul de primitive de polynôme.

— Si m est impair, soit $m' \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2m'+1$. On effectue alors le changement de variable $t = \sin x$.
$$\begin{aligned}\int \sin^n x\cos^m x\,\mathrm{d}x &= \int \sin^n x\cos^{2m'+1} x\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sin^n x\left(1-\sin^2 x\right)^{m'}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= \int t^n\left(1-t^2\right)^{m'}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

— Si n est impair, on effectue le changement de variable $t = \cos x$.

— Si n et m sont pairs, on effectue une linéarisation de l'expression.

Exercice 26

⇨ Calculer
$$\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos^2 x\sin^5 x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \cos^2 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

3.5 Qcm

Le corps ordonné $\mathbb{R}$

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

1. Si x est un nombre réel, l'inégalité $x^2 < 1$ est équivalente à

☐ **a.** $x < 1$ ☐ **b.** $x \in]-1, 1[$ ☐ **c.** $x \in]0, 1[$ ☐ **d.** $x \in [0, 1[$

2. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs avec $a < b$ et $c < d$. Alors

☐ **a.** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ☐ **b.** $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ ☐ **c.** $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ ☐ **d.** $\frac{b}{c} < \frac{a}{d}$

3. Soit x un nombre réel tel que $x < a$ pour tout réel $a > 0$. Alors

☐ **a.** $x < 0$ ☐ **b.** $x = 0$ ☐ **c.** $x > 0$ ☐ **d.** $x \leqslant 0$

Valeur absolue

1. Si x est un réel tel que $|2 - x| \leqslant 1$, alors

☐ **a.** $|x| \leqslant 1$ ☐ **b.** $|x| \leqslant 3$ ☐ **c.** $|x| \geqslant -1$ ☐ **d.** $|x| \geqslant 3$

2. Si x, y sont deux réels tels que $|x - 5| \leqslant 1$ et $|y - 1| \leqslant 1$, on a

☐ **a.** $2 \leqslant |x - y| \leqslant 6$ ☐ **b.** $0 \leqslant |x - y| \leqslant 2$ ☐ **c.** $4 \leqslant |x - y| \leqslant 6$ ☐ **d.** $4 \leqslant |x - y| \leqslant 8$

Racine

Partie entière, approximation

1. La partie entière de $-\pi$ vaut

☐ **a.** $-0,1415...$ ☐ **b.** $0,8584...$ ☐ **c.** -3 ☐ **d.** -4

2. Si x est un réel de partie entière n, on a

☐ **a.** $x - 1 < n < x$ ☐ **b.** $x - 1 \leqslant n < x$ ☐ **c.** $x - 1 < n \leqslant x$ ☐ **d.** $x - 1 \leqslant n \leqslant x$

3. Pour x réel, $\lfloor \lfloor x \rfloor + x \rfloor$ est toujours égal à

☐ **a.** $\lfloor 2x \rfloor$ ☐ **b.** $2\lfloor x \rfloor$ ☐ **c.** $\lfloor x^2 \rfloor$ ☐ **d.** $x + \lfloor x \rfloor$

4. Soit n un entier positif. Combien y a-t-il d'entiers k positifs ou nuls tels que $\sqrt{k} \leqslant n$?

☐ **a.** $\sqrt{n}$ ☐ **b.** $2n^2 + 1$ ☐ **c.** $\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$ ☐ **d.** $n^2 + 1$

Intervalle

Fonction réelle d'une variable réelle

Définition

1. Si f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := x$ et $g(x) := -x$, la fonction $\max(f, g)$

☐ **a.** est égale à f ☐ **b.** est égale à g
☐ **c.** est la fonction $x \mapsto |x|$ ☐ **d.** n'est pas définie sur $\mathbb{R}$

Symétries

1. La fonction $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ est

☐ **a.** paire
☐ **b.** impaire
☐ **c.** paire et impaire
☐ **d.** ni paire, ni impaire

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ étant une fonction quelconque, laquelle des fonctions suivantes n'est pas nécessairement paire ?

☐ **a.** $x \mapsto f(x^2)$ ☐ **b.** $x \mapsto f(x)^2$ ☐ **c.** $x \mapsto f(x)f(-x)$ ☐ **d.** $x \mapsto f(\cos x)$

3. La plus petite période positive de la fonction $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ est

☐ **a.** 2π ☐ **b.** π ☐ **c.** $\cos(2\pi)$ ☐ **d.** f n'est pas périodique

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de plus petite période $T > 0$. Alors T^2 est une période de f

☐ **a.** si et seulement si $T = 1$ ☐ **b.** si et seulement si T est entier
☐ **c.** pour tout T ☐ **d.** pour aucune valeur de T

Monotonie

1. Au sujet des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, laquelle des propositions suivantes est fausse ?

☐ **a.** la somme de deux fonctions bornées est bornée
☐ **b.** la somme de deux fonctions continues est continue
☐ **c.** la somme de deux fonctions monotones est monotone
☐ **d.** la somme de deux fonctions paires est paire

2. Soit f une fonction décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle fonction n'est pas forcément croissante ?

☐ **a.** $x \mapsto f(f(x))$ ☐ **b.** $x \mapsto -f(x)$ ☐ **c.** $x \mapsto f(-x)$ ☐ **d.** $x \mapsto f(x^2)$

Fonction majorée, minorée, bornée

Fonction continue, fonction dérivable

Limite

1. Quelles sont les limites respectives en $-\infty$ et $+\infty$ de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}$?

☐ **a.** 1 et 0 ☐ **b.** 0 et 1 ☐ **c.** $+\infty$ et 0 ☐ **d.** 0 et $+\infty$

2. Lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction $x \mapsto x^{1/x}$ tend vers

☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** e ☐ **d.** $+\infty$

Continuité

1. Une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$

☐ **a.** est toujours majorée ☐ **b.** est toujours minorée
☐ **c.** tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ☐ **d.** est continue sur $\mathbb{R}_+$

Dérivabilité

1. Si f et g sont deux fonctions réelles dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ avec $f(1) = g(1)$, alors

☐ **a.** $f'(1) = g'(1)$ ☐ **b.** $f'(1) \neq g'(1)$ ☐ **c.** $f'(1) < g'(1)$ ☐ **d.** on ne peut rien dire

2. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable paire, alors f' est

☐ **a.** paire ☐ **b.** impaire
☐ **c.** ni paire, ni impaire ☐ **d.** nulle

3. Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable, la dérivée de $x \mapsto f(x^3)$ est

☐ **a.** $x \mapsto 3x^2 f'\left(3x^2\right)$ ☐ **b.** $x \mapsto 3f'\left(x^3\right)^2$ ☐ **c.** $x \mapsto 3x^2 f'\left(x^3\right)$ ☐ **d.** $x \mapsto f'\left(x^3\right)$

4. Si f, g, h sont trois fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la dérivée du produit fgh vaut

☐ **a.** $f'g'h'$ ☐ **b.** $f'gh + fgh'$ ☐ **c.** $f'gh + fg'h + fgh'$ ☐ **d.** $f'g'h + fgh'$

5. La dérivée en x de la fonction sinus est

☐ **a.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ☐ **b.** $\sin(x+\pi)$ ☐ **c.** $\sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ ☐ **d.** $\sin(x + 2\pi)$

6. La dérivée de la fonction $x \mapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

☐ **a.** $x \mapsto x^{x-1}$ ☐ **b.** $x \mapsto xx^{x-1} = x$ ☐ **c.** $x \mapsto (1 + \ln x)\, x^x$ ☐ **d.** $x \mapsto (1 + \ln x)\, x^{x-1}$

7. L'équation de la tangente en $\frac{\pi}{4}$ au graphe de la fonction $x \mapsto \tan x$ est

☐ **a.** $y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{4}$ ☐ **b.** $y = 1 + 2x$ ☐ **c.** $y = 2x - 1$ ☐ **d.** $y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

8. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^2 x}$ est dérivable sur

☐ **a.** $\mathbb{R}$ ☐ **b.** $\mathbb{R}^*$ ☐ **c.** $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ **d.** $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

9. La dérivée de $f : x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$ est

☐ **a.** $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ☐ **b.** $x \mapsto \left|\frac{1}{x}\right|$ ☐ **c.** $x \mapsto \frac{1}{\ln|x|}$ ☐ **d.** $x \mapsto \frac{1}{x}$

10. Quelle est la dérivée en 0 de la fonction $f : x \mapsto \tan\left(1 + \sin\left(\tan\left(x^2\right)\right)\right)$?

☐ **a.** 0 ☐ **b.** $\tan 1$ ☐ **c.** $\frac{\pi}{4}$ ☐ **d.** $1 + \tan^2 1$

11. La fonction $f : x \mapsto 2 + x^5$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque

☐ **a.** n'est pas dérivable en 0 ☐ **b.** n'est pas dérivable en 2
☐ **c.** n'est pas dérivable en $\sqrt[5]{-2}$ ☐ **d.** est dérivable en tout point

12. La fonction $f : x \mapsto x + \sin x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est dérivable sur

☐ **a.** $\mathbb{R}$ ☐ **b.** $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ **c.** $\mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ☐ **d.** $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Dérivées successives

1. Soit f, g deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Quelle est la dérivée seconde de $f \circ g$?

☐ **a.** $g'' \times (f' \circ g) + (g')^2 \times (f'' \circ g)$ ☐ **b.** $g'' \times g' \times (f \circ g) + g' \times (f' \circ g)$
☐ **c.** $g' \circ f' \circ g \circ g'' \circ f \circ g$ ☐ **d.** $f'' \circ g''$

2. Pour $k \leqslant n$, la dérivée k-ième de $x \mapsto x^n$ est

☐ **a.** $x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ ☐ **b.** $x \mapsto \binom{n}{k} x^{n-k}$ ☐ **c.** $x \mapsto k! x^{n-k}$ ☐ **d.** $x \mapsto (n-k)! x^{n-k}$

3. La fonction $f : x \mapsto x + \ln x$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. On note g sa bijection réciproque qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

☐ **a.** $g'(x) = \frac{g(x)}{g(x)+1}$ ☐ **b.** $g'(x) = \frac{g(x)+1}{g(x)}$ ☐ **c.** $g'(x) = \ln g(x)$ ☐ **d.** $g'(x) = 1 + \mathrm{e}^x$

Dérivation et monotonie

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f'(x) = g'(2x)$ pour tout x, quelle fonction est constante ?

   ☐ **a.** $x \mapsto f(x) - g(2x)$ ☐ **b.** $x \mapsto 2f(x) - g(2x)$ ☐ **c.** $x \mapsto f(x) - 2g(2x)$ ☐ **d.** $x \mapsto f(x) - 2g(x)$

2. Quel est le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f(x) \coloneqq x + \sin x$ est croissante ?

   ☐ **a.** $\mathbb{R}$ ☐ **b.** $[-\pi, \pi]$ ☐ **c.** $]-\pi, \pi[$ ☐ **d.** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

3. Quel est le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f(x) \coloneqq x + \sin x$ est strictement croissante ?

   ☐ **a.** $\mathbb{R}$ ☐ **b.** $[-\pi, \pi]$ ☐ **c.** $]-\pi, \pi[$ ☐ **d.** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Intégration, primitive

Primitive

Intégration et régularité

1. Soit f une fonction continue de $[0, 2]$ dans $\mathbb{R}$. Que vaut

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

   ☐ **a.** $-\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ **b.** $-\int_2^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ **c.** $-\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ☐ **d.** $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

2. En supposant les intégrales bien définies, que vaut

$$\sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   ☐ **a.** $\int_0^k f(t)\,\mathrm{d}t$ ☐ **b.** $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ ☐ **c.** $\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ ☐ **d.** $\int_{-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$

3. Soit

$$F(x) \coloneqq \int_0^x f\left(\sin^2 t\right)\,\mathrm{d}t$$

   où f est une fonction continue. Alors $F'(x)$ est égal à

   ☐ **a.** $f(\sin^2 x)$ ☐ **b.** $2\cos(x)\sin(x)f(\sin^2 x)$

   ☐ **c.** $2\cos(x)\sin(x)f'(\sin^2 x)$ ☐ **d.** $\int_0^x 2\cos(t)\sin(t)f'\left(\sin^2 t\right)\,\mathrm{d}t$

Intégration et inégalité

Intégration par parties, changement de variable

1. Si on fait le changement de variable $u \coloneqq at$ ($a > 0$) dans l'intégrale

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

   on obtient

   ☐ **a.** $\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$ ☐ **b.** $\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$ ☐ **c.** $a\int_0^1 f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$ ☐ **d.** $\frac{1}{a}\int_0^a f\left(\frac{u}{a}\right)\,\mathrm{d}u$

2. Si dans l'intégrale
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$
on effectue le changement de variable $t = \pi/2 - u$, on obtient

☐ **a.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \,\mathrm{d}u$ ☐ **b.** $\displaystyle -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \,\mathrm{d}u$ ☐ **c.** $\displaystyle (-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \,\mathrm{d}u$ ☐ **d.** $\displaystyle (-1)^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u \,\mathrm{d}u$

3. Le changement de variable $u \coloneqq \sin t$ dans l'intégrale
$$I \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(\sin t) \,\mathrm{d}t$$
donne

☐ **a.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}} \,\mathrm{d}u$ ☐ **b.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(u) \,\mathrm{d}u$ ☐ **c.** $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(u) \,\mathrm{d}u$ ☐ **d.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}} \,\mathrm{d}u$

Calcul de primitive

1. En intégrant
$$\int_0^1 x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$
par parties, on obtient

☐ **a.** 0 ☐ **b.** 1 ☐ **c.** e ☐ **d.** $2\mathrm{e} - 1$

2. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos(2x)$ est

☐ **a.** $x \mapsto \sin(2x)$ ☐ **b.** $x \mapsto -2\sin(2x)$ ☐ **c.** $\displaystyle x \mapsto \frac{\sin(2x)}{2}$ ☐ **d.** $\displaystyle x \mapsto -\frac{\sin(2x)}{2}$

3.6 Exercices

Le corps ordonné $\mathbb{R}$

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Exercice 1 : Inégalités

1. Montrer que pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+$
$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geqslant 8abc.$$
2. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leqslant b$, on a
$$\frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{b} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{a}.$$
3. Montrer que si $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+^*$ sont tels que $a+b=1$, alors
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geqslant \frac{1}{ax+by}.$$

Exercice 2 : Puissances

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que
$$(x+y)^{\frac{1}{n}} \leqslant x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}.$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
3. Soit a et b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$n(b-a)a^{n-1} \leqslant b^n - a^n \leqslant n(b-a)b^{n-1}.$$
4. Soit $a, b, c \in [0,1]$. Montrer qu'au moins un des trois nombres réels
$$a(1-b), \quad b(1-c), \quad c(1-a)$$
est inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 3 : Système non linéaire

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n.$$
Montrer que $x_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 4 : Système non linéaire

On suppose que $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^{*4}$ vérifie le système
$$\begin{cases} x+y+z = t \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t} \end{cases}$$
Établir que $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$, et en déduire la forme générale des solutions du système ci-dessus.

Valeur absolue

Racine

Partie entière, approximation

Exercice 5 : Rationnels et irrationnels

1. Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Peut-on affirmer que $a+b$ (respectivement $a \times b$) appartient à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? Et si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
2. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

Exercice 6 : Intersection d'une famille infinie

Déterminer

$$\cap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right] \quad \text{et} \quad \cap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[.$$

Exercice 7 : Autour de la partie entière

Soit x et y deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor.$$
Y a-t-il des cas d'égalité ? D'inégalité stricte ?
2. Montrer que $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 8 : Calcul de somme

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. En déduire que si $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux
$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k \cdot \frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

Intervalle

Fonction réelle d'une variable réelle

Définition

Exercice 9 : Bijection

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1. Montrer que f est impaire puis qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
2. Déterminer f^{-1}, puis tracer les graphes de f et f^{-1}.

Symétries

Exercice 10 : Symétries de la bijection réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire et bijective. Montrer que f^{-1} est impaire.

Exercice 11 : Une fonction périodique étrange

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}$. On a donc trouvé une fonction périodique qui n'admet pas de plus petite période strictement positive.

Monotonie

Exercice 12 : Monotonie

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 13 : Monotonie et théorèmes usuels

Donner la monotonie (si possible sans dériver) des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \mathrm{e}^{-1/x^2}, \qquad \textbf{b. } \mathrm{e}^{1/x^3}, \qquad \textbf{c. } x\ln(\cos x) \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$\textbf{d. } x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \text{sur }]1,+\infty[, \qquad \textbf{e. } \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*,$$

$$\textbf{f. } \sin\left(\left(\mathrm{e}^{-x}-1\right)\pi/2\right) \text{sur } \mathbb{R}_+.$$

Fonction majorée, minorée, bornée

Fonction continue, fonction dérivable

Continuité

Exercice 14 : Domaine de continuité

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ en lesquels f est continue.

Dérivabilité

Exercice 15 : Fonction définie par morceaux

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) \coloneqq \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que g soit continue sur $[0,1]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que g soit dérivable sur $[0,1]$.

Exercice 16 : Bijection

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \coloneqq \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.

Dans la suite, on note $g : J \to \mathbb{R}_+^*$ la bijection réciproque de la corestriction de f à J.

2. Discuter de la monotonie de g, de sa continuité et sa dérivabilité. Expliciter la dérivée de g sur J.
3. Expliciter $g(y)$ en résolvant directement l'équation $f(x) = y$ et retrouver les propriétés établies à la question précédente.

Exercice 17 : Bijection

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donner les symétries et la monotonie de $g \coloneqq f^{-1}$.
3. Montrer que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)^2 - f(x)^2 = 1.$$

   En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. Expliciter g^{-1} en résolvant directement l'équation $f(x) = y$.

Dérivation et monotonie

Exercice 18 : Études de variations

Étudier les variations des fonctions suivantes

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Intégration, primitive

Primitive

Exercice 19 : Bijection

Soit f la fonction définie sur $]-1, 1[$ par

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad f(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dans cet exercice, il est interdit d'utiliser la fonction Arcsin.

1. Montrer que f admet une unique primitive F s'annulant en 0.
2. Montrer que $F(x)$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers 1.
3. Montrer que F est impaire.

On définit la fonction φ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par

$$\forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[, \quad \varphi(x) \coloneqq F(\sin x).$$

4. En dérivant φ, montrer que
$$\forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[, \quad F(\sin x) = x.$$
5. En déduire la valeur de l.

Intégration et régularité

Intégration et inégalité

Exercice 20 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit g la fonction d'expression

$$g(x) \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^t}{1 + x \sin t} \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que g est décroissante.

Exercice 21 : Sommes de Riemann de fonctions monotones

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, 1]$. On définit la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \coloneqq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$
$$u_n - \frac{1}{n}\left(f(1) - f(0)\right) \leqslant \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant u_n.$$
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t$. En donner une interprétation géométrique.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite (v_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n := \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha}.$$
Montrer que
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$
c'est-à-dire que la suite de terme général
$$v_n \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$$
converge vers 1.

Intégration par parties, changement de variable

Exercice 22 : Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n et J_n par
$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t \qquad J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
2. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont positives et décroissantes. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
4. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$
5. En déduire que
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
c'est-à-dire que la suite de terme général $I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ converge vers 1.

Exercice 23 : Intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n := \int_0^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x.$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}.$$

Calcul de primitive

Exercice 24 : Calcul de primitives

Donner le domaine de définition et calculer les primitives suivantes

$$\textbf{a.} \int \left(x^2+x+1\right) \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x, \qquad \textbf{b.} \int \left(x^2-1\right) \cos x \, \mathrm{d}x, \qquad \textbf{c.} \int x^3 \ln x \, \mathrm{d}x,$$

$$\textbf{d.} \int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x, \qquad \textbf{e.} \int \sin x \cos^2 x \, \mathrm{d}x, \qquad \textbf{f.} \int \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x,$$

$$\textbf{g.} \int \frac{x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x, \qquad \textbf{h.} \int \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x, \qquad \textbf{i.} \int \ln^n x \, \mathrm{d}x \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}).$$

Chapitre 4

Compléments d'algèbre

« The closer one looks, the more subtle and remarkable Gaussian elimination appears. »

— Nick Trefethen (1955–)

4.1 Somme et produit, fonction polynôme

4.1.1 Somme

Définition 4.1.1

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$ et $u_m, u_{m+1}, \dots, u_{n-1}, u_n \in \mathbb{C}$. On définit

$$\sum_{k=m}^{n} u_k := u_m + u_{m+1} + \dots + u_{n-1} + u_n.$$

Remarque

⇨ Lorsque $n = m - 1$, la convention est de poser $\sum_{k=m}^{n} u_k := 0$. Cette convention permet d'écrire

$$\forall n \geqslant m, \quad \sum_{k=m}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=m}^{n-1} u_k.$$

⇨ Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m - 1$, alors $\mathrm{Card}(\llbracket m, n \rrbracket) = n - m + 1$. En particulier, quel que soit $a \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n - m + 1)\, a.$$

Exercice 1

⇨ Écrire avec le symbole $\sum$ les sommes suivantes, sachant que chacune d'elle est composée de $n+1$ termes.

$$-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 + \cdots, \qquad a_1 + a_4 + a_7 + \cdots$$

$$a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots, \qquad a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + \cdots.$$

Proposition 4.1.2

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} u_k + \mu \sum_{k=m}^{n} v_k.$$

Proposition 4.1.3

— Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}.$$

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}.$$

Remarques

⇨ En pratique, lorsque l'on souhaite faire la première transformation, on dit qu'on effectue le changement de variable $k \to k+p$.

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = « \sum_{k=m}^{k=n} u_k = \sum_{k+p=m}^{k+p=n} u_{k+p} = \sum_{k=m-p}^{k=n-p} u_{k+p} » = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}.$$

Le seconde transformation se fait de manière similaire, en utilisant cette fois la convention que si les bornes ne sont pas « dans le bon sens », on les échange ; on dit dans ce cas qu'on fait le changement de variable $k \to n-k$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = « \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{n-k=0}^{n-k=n} u_{n-k} = \sum_{k=n}^{k=0} u_{n-k} = \sum_{k=0}^{k=n} u_{n-k} » = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}.$$

⇨ Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite. Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m-1$

$$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m.$$

On dit qu'une telle somme est *télescopique*.

Exercices 2

⇨ 1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en effectuant le changement de variable $k \to k+1$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k.$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant les racines $(2n+1)$-ièmes de l'unité, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Définition 4.1.4

Soit $r \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite *en progression arithmétique de raison r* lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

Proposition 4.1.5

Soit (u_n) une suite en progression arithmétique et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $n \geqslant m - 1$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} u_k &= \frac{u_m + u_n}{2} \cdot (n - m + 1) \\ &= \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \cdot (\text{nombre de termes}) . \end{aligned}$$

Proposition 4.1.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Définition 4.1.7

Soit $q \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite *en progression géométrique de raison q* lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n.$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

Proposition 4.1.8

Soit (u_n) une suite en progression géométrique dont la raison $q \in \mathbb{C}$ est différente de 1 et $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} u_k &= \frac{u_m - u_{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{\text{premier terme} - \text{terme suivant}}{1 - q}. \end{aligned}$$

Exercices 3

- ⇨ Montrer que la suite de terme général

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

  est convergente.
- ⇨ Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\sum_{k=0}^{n} k x^k.$$

Proposition 4.1.9

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2k+1}$$

Exercice 4

⇨ Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$$

4.1.2 Produit

Définition 4.1.10

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $m \leqslant n$ et $u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}, u_n \in \mathbb{C}$. On définit

$$\prod_{k=m}^{n} u_k := u_m \cdot u_{m+1} \cdots u_{n-1} \cdot u_n.$$

Remarques

⇨ Lorsque $n = m - 1$, la convention est de poser $\prod_{k=m}^{n} u_k := 1$. Cette convention permet d'écrire

$$\forall n \geqslant m, \quad \prod_{k=m}^{n} u_k = u_n \prod_{k=m}^{n-1} u_k.$$

⇨ Si $m, n \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n \geqslant m - 1$. Alors, quel que soit $a \in \mathbb{C}$

$$\prod_{k=m}^{n} a = a^{n-m+1}.$$

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Exercice 5

⇨ Exprimer, à l'aide de factorielles, les produits

$$\prod_{k=1}^{n} (2k) \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} (2k+1).$$

Proposition 4.1.11

Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\prod_{k=m}^{n} u_k v_k = \left(\prod_{k=m}^{n} u_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} v_k\right).$$

4.1.3 Somme et produit doubles

On parle de somme double lorsqu'il y a deux indices. Pour sommer les éléments $u_{i,j}$ d'un tableau à n lignes et m colonnes, on peut procéder d'au moins deux manières : une sommation en lignes ou en colonnes. Évidemment, le résultat est le même.

Proposition 4.1.12

Soit $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ et $(u_{i,j})$ une famille d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors

$$\sum_{i=m_1}^{n_1} \sum_{j=m_2}^{n_2} u_{i,j} = \sum_{j=m_2}^{n_2} \sum_{i=m_1}^{n_1} u_{i,j}.$$

Remarque

⇨ Cette somme est parfois notée

$$\sum_{\substack{m_1 \leqslant i \leqslant n_1 \\ m_2 \leqslant j \leqslant n_2}} u_{i,j} \quad \text{ou} \quad \sum_{(i,j) \in [\![m_1, n_1]\!] \times [\![m_2, n_2]\!]} u_{i,j}.$$

Exercices 6

⇨ Calculer
$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} ij \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} (i+j).$$

⇨ Calculer
$$\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} \binom{i}{j}.$$

⇨ Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} k2^k$$
en remarquant astucieusement que $k = \sum_{i=1}^{k} 1$.

Proposition 4.1.13

Soit $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (v_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{C}$. Alors
$$\left(\sum_{i=m_1}^{n_1} u_i\right)\left(\sum_{j=m_2}^{n_2} v_j\right) = \sum_{i=m_1}^{n_1}\sum_{j=m_2}^{n_2} u_i v_j.$$

Exercices 7

⇨ Calculer
$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} |i-j|.$$

⇨ Calculer
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{n-k} \frac{k}{s+k}.$$

4.1.4 Fonction polynôme

Dans la suite de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 4.1.14

On appelle *fonction polynôme* à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute fonction $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que
$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n.$$
L'ensemble des fonctions polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

Remarque

⇨ On dit qu'une fonction polynôme $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ est de *degré* $n \in \mathbb{N}$ lorsqu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $a_n \neq 0$ et
$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n.$$

Exercice 8

⇨ 1. Montrer que pour tout $n \in [\![0, 3]\!]$, il existe une fonction polynôme P_n de degré n telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(nx) = P_n(\cos x).$$

2. Généraliser ce résultat pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 4.1.15

Si $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, on appelle *racine* de P tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Remarques

⇨ Le calcul des racines des fonctions polynôme de degré 2 se fait en utilisant le discriminant.

⇨ Il n'y a pas de méthode systématique pour trouver les racines des fonctions polynôme de degré supérieur. En effet, on peut montrer qu'il n'existe pas de formule générale permettant de calculer les racines des fonctions polynôme de degré 3 ou plus avec des radicaux réels. Et même si on s'autorise les racines n-ièmes de nombres complexes, il n'existe pas de formule générale permettant de déterminer les racines de fonctions polynôme de degré 5 ou plus. Cependant, il existe différentes techniques qui sont efficaces pour certaines fonctions polynôme.

Proposition 4.1.16

Soit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = (z - \alpha)Q(z).$$

Remarques

⇨ La factorisation effective se fait par division euclidienne. Par exemple, si $P(z) \coloneqq z^3 + 3z^2 + 3z + 2$, on remarque que $P(-2) = 0$ donc $P(z)$ se factorise par $z + 2$ et la division euclidienne s'effectue de la manière suivante.

$$\begin{array}{rrrr|l} z^3 & +3z^2 & +3z & +2 & z+2 \\ \cline{5-5} z^3 & +2z^2 & & & z^2+z+1 \\ \cline{1-2} & z^2 & +3z & +2 & \\ & z^2 & +2z & & \\ \cline{2-3} & & z & +2 & \\ & & z & +2 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

donc $z^3 + 3z^2 + 3z + 2 = (z + 2)(z^2 + z + 1)$. Puisque les racines de $Q(z) \coloneqq z^2 + z + 1$ sont j et j^2, on en déduit que les racines de P sont $-2, \mathrm{j}$ et j^2.

⇨ Si P est une fonction polynôme à coefficients entiers, il existe une technique efficace pour déterminer rapidement ses racines rationnelles. Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que $P(z) \coloneqq a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. Si r est une racine rationnelle de P, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux tels que $r = p/q$. Puisque $P(r) = 0$, on en déduit que

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

En multipliant par q^n, on obtient

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

On en déduit que

$$a_n p^n = -q \left(a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}\right)$$

et donc que q divise $a_n p^n$. Or q et p sont premiers entre eux donc q et p^n sont premiers entre eux. D'après le lemme de Gauss, on en déduit que q divise a_n. De même, on montre que p divise a_0. Comme il existe un nombre fini de diviseurs d'un entier non nul, les racines rationnelles sont donc à chercher parmi un nombre fini d'éléments. Par exemple, si $P(z) \coloneqq 3z^3 + 5z^2 + 5z + 2$, et si p/q est une racine rationnelle mise sous forme irréductible de P, alors p divise 2 et q divise 3. Donc $p \in \{-2, -1, 1, 2\}$ et $q \in \{1, 3\}$. Les racines rationnelles éventuelles de P sont donc parmi $\{-2, -1, 1, 2, -2/3, -1/3, 1/3, 2/3\}$. Si on teste tous ces rationnels, on se rend compte que $-2/3$ est une racine de P. $P(z)$ se factorise donc par $3z + 2$ et une division euclidienne nous donne $P(z) = (3z + 2)(z^2 + z + 1)$. Les racines de P sont donc $-2/3, \mathrm{j}$ et j^2.

⇨ D'autres techniques permettent de trouver les racines d'une fonction polynôme de degré $n \geqslant 3$. Par exemple, pour certaines fonctions polynôme, ramener la recherche de leurs racines à la recherche des racines n-ièmes d'un nombre complexe.

Proposition 4.1.17

Une fonction polynôme $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines.

Remarques

⇨ Soit $P \in \mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ une fonction polynôme et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

Si P admet au moins $n + 1$ racines, alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

⇨ Soit $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ et R une partie de $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall z \in R, \quad a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_1 z + b_0.$$

Si R possède au moins $n+1$ éléments (en particulier si R est infini), alors $a_n = b_n, \dots, a_0 = b_0$.

⇨ Si P est une fonction polynôme non nulle, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et une unique famille $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n.$$

On dit que n est le *degré* de P et que $a_0, \dots, a_n$ sont ses *coefficients*.

4.2 Trigonométrie

4.2.1 Égalité modulaire

Définition 4.2.1

Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que a est *congru à b modulo m* et on note

$$a \equiv b \ [m]$$

lorsqu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$.

Exercice 9

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Quel est le lien logique entre

$$« \, a \equiv b \ [2\pi] \, » \quad \text{et} \quad « \, a \equiv b \ [\pi] \, » \, ?$$

Proposition 4.2.2

— Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$a_1 \equiv b_1 \ [m] \quad \text{et} \quad a_2 \equiv b_2 \ [m].$$

Alors, quels que soient $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$,

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 \equiv k_1 b_1 + k_2 b_2 \ [m].$$

— Soit $m \in \mathbb{R}_+^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$a \equiv b \ [m].$$

Alors, si $c \in \mathbb{R}_+^*$

$$ac \equiv bc \ [mc].$$

Remarques

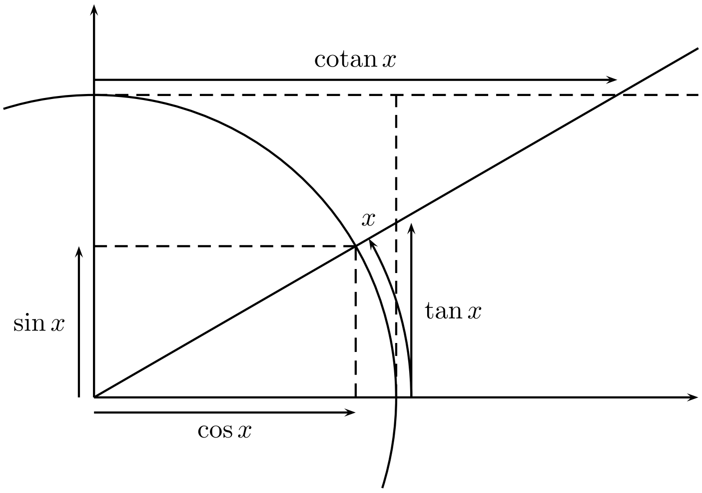
⇨ On en déduit qu'on peut raisonner avec les « $\equiv$ » de la même manière qu'avec « $=$ » pour résoudre les équations.
— On peut passer une expression d'un côté à l'autre du « $\equiv$ » en changeant son signe.
— On peut multiplier les deux côtés du signe « $\equiv$ » par un même coefficient $c \in \mathbb{R}_+^*$. Il suffit juste de multiplier le modulo par c.

Ces deux transformations permettent de raisonner par équivalence.

⇨ Si $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}_+^*$, alors l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x \equiv a \ [m]$ est noté

$$a + m\mathbb{Z} \coloneqq \{a + km : k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.2.2 Formules de trigonométrie



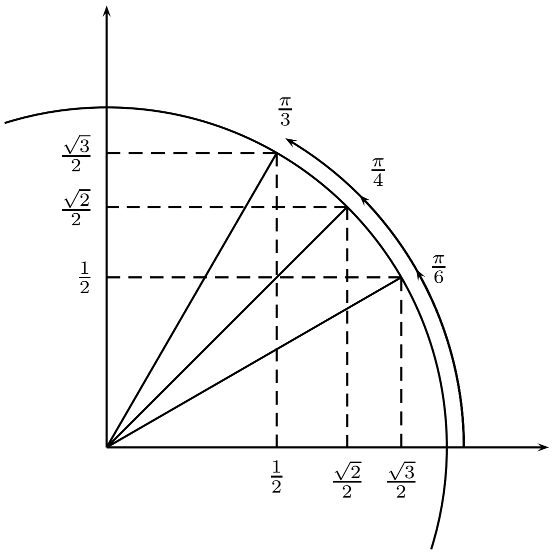
Définition 4.2.3

On définit le *sinus*, le *cosinus*, la *tangente* et la *cotangente* d'un angle x exprimé en radians sur le cercle trigonométrique de rayon 1 comme ci-dessus. En particulier $\tan x$ n'est défini que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, $\operatorname{cotan} x$ n'est défini que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Remarque

⇨ On rappelle les principales valeurs remarquables.



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\operatorname{cotan} x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

⇨ Si $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, alors

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}.$$

Proposition 4.2.4

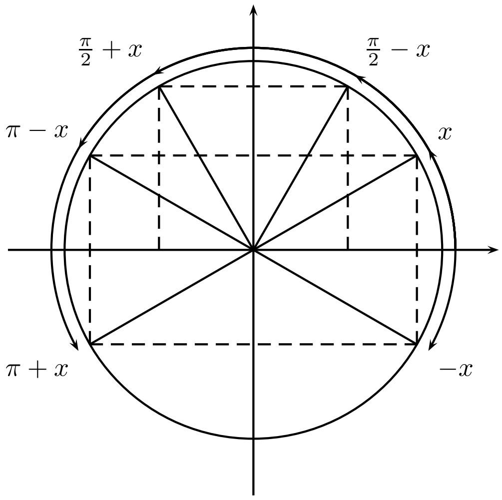
D'après Pythagore, on a

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$1 + \operatorname{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Proposition 4.2.5: Symétries

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x & \cos(\pi + x) &= -\cos x & \cos(\pi - x) &= -\cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x & \sin(\pi + x) &= -\sin x & \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \tan(-x) &= -\tan x & \tan(\pi + x) &= \tan x & \tan(\pi - x) &= -\tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos x & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\operatorname{cotan} x & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \operatorname{cotan} x \end{aligned}$$



Remarques

- ⇨ Il est important de retrouver rapidement ces formules en dessinant le cercle trigonométrique et un « petit » angle x vérifiant $0 < x < \pi/4$.
- ⇨ Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x \qquad \text{et} \qquad \sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x.$$

  En particulier $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$.
- ⇨ Quels que soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos x = \cos y &\iff [x \equiv y\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -y\ [2\pi]] \\ \sin x = \sin y &\iff [x \equiv y\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \pi - y\ [2\pi]] \end{aligned}$$

- ⇨ Quels que soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y\ [\pi].$$

Exercices 10

⇨ Calculer

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right), \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right).$$

⇨ Résoudre l'équation $\sin x = \cos x$.

Proposition 4.2.6: Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Remarque

⇨ Si $a, b \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous les deux nuls, on pourra factoriser $a\cos x + b \sin x$ de la manière suivante.

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$

Puisque

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta_0 = a/\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sin\theta_0 = b/\sqrt{a^2+b^2}$. On a alors

$$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta_0\cos x + \sin\theta_0 \sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\theta_0). \end{aligned}$$

Exercice 11

⇨ Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$.

Proposition 4.2.7: Angle double

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2\cos x \sin x \\ \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Exercices 12

⇨ Exprimer $\cos(\pi/8)$ à l'aide de radicaux.

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_n := \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right).$$

Simplifier $p_n \sin(a/2^n)$ puis en déduire la limite de la suite (p_n).

Proposition 4.2.8: Linéarisation

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

Exercice 13

⇨ Linéariser $\cos^3 x$, $\cos x \sin^2 x$, puis $\sin^4 x$.

Proposition 4.2.9: Factorisation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}$$
$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}$$

Exercice 14

⇨ En multipliant par $\sin(x/2)$, calculer

$$A := \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \quad \text{et} \quad B := \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx).$$

Proposition 4.2.10

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Alors, en posant $t := \tan(x/2)$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

4.3 Récurrence linéaire

4.3.1 Récurrence linéaire d'ordre 1

Définition 4.3.1

Si (a_n) et (b_n) sont deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, l'équation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + a_n u_n = b_n$$

dont l'inconnue est la suite (u_n) est appelée *récurrence linéaire d'ordre 1*.

Proposition 4.3.2

Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors, les solutions de la récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n$$

sont les suites (u_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda a^n$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 4.3.3

Soit (a_n) et (b_n) deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si (v_n) est une solution « particulière » de la récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + a_n u_n = b_n$$

alors, les solutions de cette récurrence linéaire sont les suites $(v_n + u_n)$ où (u_n) parcourt l'ensemble des solutions de la récurrence linéaire homogène associée

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + a_n u_n = 0.$$

Exercices 15

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0 := a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} := \frac{3}{2} u_n + 5.$$

⇨ On considère la récurrence linéaire

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - 2u_n = n^2.$$

1. Déterminer une solution polynomiale de (E).
2. En déduire toutes les solutions.

Remarques

⇨ *Méthode de la similitude* : Si l'on cherche les suites vérifiant la récurrence linéaire $u_{n+1} = au_n + b$, on introduit la fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par $f(z) := az + b$.

— Si $a = 1$, une récurrence immédiate nous montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb.$$

— Sinon, f admet un unique point fixe $\omega \in \mathbb{K}$ et, pour tout $z \in \mathbb{K}$, $f(z) = a(z - \omega) + \omega$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \omega = a(u_n - \omega)$$

et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n(u_0 - \omega) + \omega.$$

⇨ *Méthode de la sommation télescopique* : Si l'on cherche les suites vérifiant la récurrence linéaire $u_{n+1} = au_n + b_n$ où $a \in \mathbb{K}^*$, on commence par remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{k+1}}{a^{k+1}} - \frac{u_k}{a^k} = \frac{b_k}{a^{k+1}},$$

puis on somme cette relation pour k allant de 0 à $n-1$. On obtient une somme télescopique, puis

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_n}{a^n} - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{a^{k+1}}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{n-(k+1)}.$$

4.3.2 Récurrence linéaire d'ordre 2

Proposition 4.3.4

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. On souhaite trouver les suites (u_n) vérifiant

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.
- Si cette équation admet deux racines distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
- Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{C}^*$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := (\lambda + \mu n)\, r^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Exercices 16

⇨ Calculer le n-ième terme de la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 := 1, \qquad F_1 := 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} := F_{n+1} + F_n.$$

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0 := a, \quad u_1 := b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := \frac{1}{u_{n+1}^2 u_n}.$$

Remarques

⇨ La suite de Fibonacci est ainsi nommée en hommage à Leonardo Pisano (Leonard de Pise, 1170–1240) appelé aussi Leonardo Fibonacci, qui avait publié cette suite en 1202. Il avait lu le travail de Al-Khwarizmi (780–850), un mathématicien Persan. Le livre de Fibonacci contient le problème suivant. Combien de couples de lapins peuvent naître d'un couple de lapin en un an ? Pour résoudre ce problème, on sait que :
- Jusqu'au premier mois inclus, il n'y a qu'un couple de lapins.
- Chaque couple de lapin donne naissance à un couple tous les mois.
- Chaque jeune couple devient fertile à l'âge d'un mois.

Avant le travail de Fibonacci, la suite (F_n) a déjà été étudiée par les Indiens qui se demandaient combien de rythmes de n temps il était possible de faire avec des noires et des blanches.

⇨ Tout comme pour les récurrences linéaires d'ordre 1, afin de résoudre une récurrence linéaire de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c_n,$$

il suffit d'en trouver une solution particulière (v_n) et d'y ajouter les solutions de la récurrence linéaire homogène associée $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Proposition 4.3.5

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On souhaite trouver les suites (u_n) vérifiant

$$(E) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.
- Si cette équation admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{R}^*$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := (\lambda + \mu n)\, r^n$$
où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$ et $r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := [\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n)]\, r^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque

⇨ Dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, les solutions de (E) peuvent s'écrire sous la forme
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \lambda \sin(\omega n - \varphi) r^n$$
où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$. Lors de la recherche effective de tels coefficients, quitte à changer φ en $\varphi + \pi$, on impose souvent $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercices 17

⇨ Soit (u_n) la suite définie par
$$u_0 := 1, \quad u_1 := 0, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := 2u_{n+1} - 4u_n.$$
Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $u_n = 0$.

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par
$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := 2\cos(\alpha)\, u_{n+1} - u_n.$$

4.4 Système linéaire

4.4.1 Système linéaire à q équations et p inconnues

Définition 4.4.1

On appelle *système linéaire* à q équations et p inconnues tout système d'équations du type
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases}$$
où $a_{1,1}, \ldots, a_{q,p}, y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{K}$ et $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$ sont les inconnues. On dit que le système est *compatible* lorsqu'il admet au moins une solution. On dit qu'il est *incompatible* sinon.

Remarques

⇨ Pour des raisons de lisibilité, on veillera à toujours placer les inconnues les unes en dessous des autres.

⇨ L'ensemble des solutions est l'ensemble $\mathcal{S}$ des $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ solution du système.

Exercice 18

⇨ Résoudre le système suivant par substitution, puis en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x \ + y = 9. \end{cases}$$

Proposition 4.4.2

Les opérations suivantes, appelées opérations élémentaires, transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

- Changer l'ordre des équations.
- Changer l'ordre des inconnues.
- Multiplier une équation par $\mu \in \mathbb{K}^*$.
- Ajouter λ fois (avec $\lambda \in \mathbb{K}$) une équation à l'une des équations suivantes.

Remarques

⇨ En pratique, afin d'expliciter les opérations que l'on vient d'effectuer, on utilisera les notations suivantes.
- $L_i \leftrightarrow L_j$ signifie qu'on a échangé les lignes i et j.
- $L_i \leftarrow \mu L_i$ signifie qu'on a multiplié la ligne L_i par le coefficient μ non nul.
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ signifie qu'on a ajouté λ fois la ligne L_j à la ligne L_i.

⇨ Effectuer plusieurs opérations à la fois peut prêter à confusion. Par exemple, supposons que l'on souhaite effectuer les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$ en une seule étape. Lors de la seconde opération, on ne sait pas si L_1 fait référence à la première ligne *avant* ou *après* la première opération. Pour cette raison, on s'interdira ce type d'opération. Cependant, si l'on effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - \alpha_2 L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - \alpha_3 L_1$, aucune confusion n'est possible et on pourra effectuer ces deux opérations lors d'une même étape. Plus généralement, si l'on souhaite enlever à chaque ligne i située en dessous d'une ligne j le terme $\alpha_i L_j$, on fera cela lors d'une même étape.

Exercice 19

⇨ Les opérations suivantes conservent-elles l'équivalence ?
- $L_1 \leftarrow L_2$.
- $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.
- $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$.
- $L_1 \leftarrow \alpha L_1 + \beta L_2$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
- $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ puis $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$.

Proposition 4.4.3

L'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer, quitte à échanger les variables, un système linéaire à q équations et p inconnues en un système linéaire équivalent de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad = \vdots \\ \qquad\qquad a_{r,r}x_r + \cdots + a_{r,p}x_p = y_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = y_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = y_q \end{cases}$$

où $a_{1,1}, \ldots, a_{r,r}$ sont tous non nuls. On dit d'un tel système qu'il est *échelonné à pivots diagonaux*.
- Le système est compatible si et seulement si $(y_{r+1}, \ldots, y_q) = (0, \ldots, 0)$.
- Le système admet une unique solution si et seulement si il est compatible et $r = p$.

Remarque

⇨ Lors de l'algorithme du pivot de Gauss, les seules opérations que l'on s'autorise sont :
- Changer l'ordre des équations ou des inconnues, simplifier une équation par un coefficient μ non nul.
- Enlever à chaque ligne i située en dessous d'une ligne j le terme $\alpha_i L_j$.

Exercices 20

⇨ Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} x + 5y = 1 \\ 2x + 11y = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = 1. \end{cases}$$

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + z = \alpha. \end{cases}$$

Remarques

⇨ Voici une présentation détaillée de l'algorithme du Pivot de Gauss.
- *On transforme le système en un système échelonné.*
  On commence par déterminer un coefficient $a_{i,j}$ non nul que l'on appelle *pivot*. En effectuant un échange de lignes et d'inconnues, on « remonte » ensuite ce coefficient en haut à gauche du système. On se retrouve donc dans le cas où $a_{1,1} \neq 0$. On utilise alors $a_{1,1}$ comme pivot pour éliminer l'inconnue x_1 des $q-1$ dernières lignes du système :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases} \iff \begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p = y'_1 \\ \qquad a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p = y'_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad a'_{q,2}x_2 + \cdots + a'_{q,p}x_p = y'_q. \end{cases}$$

  Pour cela, il suffit d'effectuer les opérations suivantes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad \ldots \qquad L_q \leftarrow L_q - \frac{a_{q,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1.$$

  On recommence ensuite le même procédé sur les $q-1$ dernières équations du système, en ne touchant plus à la première ligne. On cherche d'abord un coefficient $a'_{i,j}$ non nul parmi ceux pour lesquels $i \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$. Si un tel coefficient existe, un échange de lignes et d'inconnues permet de se ramener au cas où $a'_{2,2} \neq 0$ et de continuer l'algorithme. On réitère le procédé jusqu'à ce qu'on ne soit plus capable de trouver de pivot. Le système est alors échelonné. Au cours du calcul, s'il apparaît l'équation $0 = 0$, on l'élimine du système. Si au contraire il apparaît l'équation $0 = b$ avec $b \neq 0$, le système n'admet aucune solution et la résolution est terminée.

— *On introduit les paramètres t_k.*
Dans le cas où le système admet au moins une solution, on aboutit à un système de la forme

$$\begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a''_{1,p}x_p = y''_1 \\ \qquad a''_{2,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a''_{2,p}x_p = y''_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad = \vdots \\ \qquad\qquad a''_{r,r}x_r + \cdots + a''_{r,p}x_p = y''_r \end{cases}$$

où les $a''_{1,1}, a''_{2,2}, \ldots, a''_{r,r}$ sont tous non nuls. Afin de paramétrer l'ensemble des solutions, on remarque que ce dernier système est équivalent au système triangulaire

$$\exists t_{r+1}, \ldots, t_p \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a''_{1,p}x_p = y''_1 \\ \qquad a''_{2,2}x_2 + \quad \cdots \quad + a''_{2,p}x_p = y''_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad = \vdots \\ \qquad\qquad a''_{r,r}x_r + \cdots + a''_{r,p}x_p = y''_r \\ \qquad\qquad\qquad x_{r+1} \qquad = t_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \qquad = \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x_p = t_p. \end{cases}$$

En effet, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution de ce dernier système, on obtient le système précédent en ne gardant que les r premières lignes. Réciproquement, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution du système échelonné, on obtient ce dernier système en posant $t_{r+1} \coloneqq x_{r+1}, \ldots, t_p \coloneqq x_p$.

— *On résout le système triangulaire.*
Ce dernier système se résout simplement en remontant les calculs de la dernière ligne à la première, par substitution. On obtient ainsi le système équivalent

$$\exists t_{r+1}, \ldots, t_p \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} x_1 = c_1 + d_{1,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{1,p}t_p \\ \vdots = \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_r = c_r + d_{r,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{r,p}t_p \\ x_{r+1} = \qquad t_{r+1} \\ \vdots = \qquad\qquad \ddots \\ x_p = \qquad\qquad\qquad t_p \end{cases}$$

qui est un *paramétrage* de l'ensemble des solutions.
Remarquons que lorsque les calculs sont complexes, au lieu de résoudre directement le système triangulaire par substitution, on peut aussi effectuer un pivot de Gauss « à l'envers » en commençant par éliminer les x_p des $p-1$ premières équations avec la dernière ligne, puis en éliminant les x_{p-1} des $p-2$ premières équations avec l'avant-dernière ligne, etc.

⇨ Lorsqu'on applique l'algorithme du pivot de Gauss, on est libre de choisir le pivot que l'on souhaite. La seule contrainte est qu'il soit non nul. L'expérience montre cependant que certains choix sont plus judicieux que d'autres, car ils conduisent à des calculs plus simples.
Par exemple, un pivot égal à 1 est idéal car les opérations sur les lignes sont réduites à $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1$. On évite ainsi les divisions, ce qui offre de nombreux avantages. Par exemple, lorsque les coefficients du système sont entiers, ils le restent après réduction du système. Dans le même ordre d'idées, avant de choisir le pivot, lorsque les coefficients d'une même ligne sont des multiples d'un entier $a \in \mathbb{Z}^*$, il est bon de simplifier cette ligne par a.
Enfin, lorsque les coefficients du système dépendent d'un paramètre α, il est toujours préférable d'utiliser un pivot ne dépendant pas de α. Cette stratégie permet d'éviter de discuter les cas où ce terme peut s'annuler, et limite la propagation de ce paramètre à tous les autres coefficients du système.

Exercice 21

⇨ Discuter et résoudre les systèmes suivants, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -3a + \alpha b = 0 \\ -3a - b + 2\alpha c = 0 \\ -2b + c + 3\alpha d = 0 \\ -c + 3d = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ a + \alpha b + c - \alpha d = \alpha + 2 \\ \alpha a - b - \alpha c - \alpha d = -1. \end{cases}$$

Remarque

⇨ Il est parfois pratique dans les calculs d'omettre le nom des variables. On utilise alors ce qu'on appelle une *matrice augmentée*.

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+3y=4 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\iff} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
$$\iff \begin{cases} x = -5 \\ y = 3. \end{cases}$$

Cette technique a l'avantage d'écrire le minimum nécessaire et de vous obliger à aligner les coefficients les uns au-dessus des autres. Son seul inconvénient est de rendre impossible le changement d'ordre des inconnues.

Définition 4.4.4

On considère un système linéaire à q équations et p inconnues.

$$(E) \qquad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases}$$

— On dit qu'il est *homogène* lorsque $(y_1, \dots, y_q) = (0, \dots, 0)$.
— On appelle *système linéaire homogène* associé à (E), le système obtenu en remplaçant les y_i par 0.

Remarque

⇨ Le p-uplet $(x_1, \dots, x_p) = (0, \dots, 0)$ est toujours solution d'un système homogène. On dit que c'est la *solution triviale*. Il est possible que ce soit la seule solution ou qu'il y en ait d'autres.

4.4.2 Interprétation géométrique lorsque $p = 2$ ou $p = 3$

Dans cette partie, nous allons donner une interprétation géométrique des résultats précédents aux cas $p = 2$ et $p = 3$. Commençons par le cas $p = 2$. On munit le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On rappelle qu'un point M du plan est déterminé de manière unique par ses coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ définies par

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}.$$

Proposition 4.4.5

— Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors l'ensemble d'équation $ax + by = c$ est une droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b).
— Réciproquement, soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a, b). Alors, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $ax + by = c$ est une équation de $\mathcal{D}$.

Résoudre un système linéaire à q équations et 2 inconnues x et y dont chaque ligne contient un coefficient non nul revient donc à déterminer l'intersection de q droites du plan. Le cas où $q = 2$ est important.

— Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ne sont pas parallèles, alors elles se coupent en un unique point. Le système admet donc une unique solution.
— Si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles, deux cas se présentent.
  — Si elles ne sont pas confondues, elles ne se coupent pas. Le système n'admet donc aucune solution.
  — Si elles sont confondues, le système admet une infinité de solutions. Ce sont les coordonnées des points de cette droite.

Pour obtenir une interprétation géométrique du cas $p = 3$, on munit l'espace d'un repère orthonormé

$$\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).$$

On rappelle qu'on point M de l'espace est déterminé de manière unique par ses coordonnées $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ définies par

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3}.$$

Proposition 4.4.6

- Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Alors l'ensemble d'équation $ax+by+cz=d$ est un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a,b,c).
- Réciproquement, soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (a,b,c). Alors, il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $ax+by+cz=d$ est une équation de $\mathcal{P}$.

Résoudre un système linéaire à q équations et 3 inconnues x, y et z dont chaque ligne contient un coefficient non nul revient donc à déterminer l'intersection de q plans dans l'espace. Le cas où $q=3$ est important.

- Le plus souvent, les 3 plans s'intersectent en un unique point.
- Sinon, l'intersection des 3 plans est soit un plan, soit une droite, soit vide.

4.5 Qcm

Somme et produit

Somme

1. Parmi les suites suivantes, laquelle est une suite géométrique ?

   ☐ **a.** $a_n \coloneqq e^{3n}$ ☐ **b.** $b_n \coloneqq (n+1)^n$ ☐ **c.** $c_n \coloneqq 2^{n^2}$ ☐ **d.** $d_n \coloneqq 3n$

2. Combien vaut $a + a^2 + \cdots + a^n$ lorsque a est un réel différent de 1 ?

   ☐ **a.** $\dfrac{1-a^n}{1-a}$ ☐ **b.** $\dfrac{a-a^n}{1-a}$ ☐ **c.** $\dfrac{a(1-a^n)}{1-a}$ ☐ **d.** $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$

3. Soit $u_n \coloneqq 2n+3$. Combien vaut $u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$?

   ☐ **a.** $3\,(n+1)^2$ ☐ **b.** $3n(n+1)$ ☐ **c.** $\dfrac{(n+1)(6n+9)}{2}$ ☐ **d.** $\dfrac{n(6n+9)}{2}$

4. Quel est le comportement de la suite définie par $u_0 \coloneqq 1/2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} \coloneqq u_n^3$?

   ☐ **a.** elle tend vers 1 en croissant ☐ **b.** elle tend vers 1 en décroissant
   ☐ **c.** elle tend vers 0 en décroissant ☐ **d.** elle diverge vers $+\infty$ en croissant

5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle qui vérifie
   $$\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_n}{n}$$
   pour tout $n \geqslant 1$. Alors

   ☐ **a.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante ☐ **b.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge
   ☐ **c.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ ☐ **d.** $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmétique

Produit

Somme et produit doubles

Fonction polynôme

Trigonométrie

Égalité modulaire

Formules de trigonométrie

1. La valeur de $\tan(-\pi/4)$ est

   ☐ **a.** $-\sqrt{3}$ ☐ **b.** -1 ☐ **c.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ **d.** 1

2. La valeur de $\tan(\pi/6)$ est

   ☐ **a.** $\sqrt{3}$ ☐ **b.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ☐ **c.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ☐ **d.** $\dfrac{1}{3}$

3. La valeur de $\operatorname{cotan}(-7\pi/6)$ est

   ☐ **a.** $\sqrt{3}$ ☐ **b.** $-\sqrt{3}$ ☐ **c.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ☐ **d.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

4. La valeur de $\cos\left(\pi \sin \frac{\pi}{6}\right)$ est

   ☐ **a.** 0 ☐ **b.** $\dfrac{1}{2}$ ☐ **c.** 1 ☐ **d.** irrationnelle

5. Si $\sin x = 1/2$, alors

☐ **a.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [\pi]$ ☐ **b.** $x \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

☐ **c.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ☐ **d.** $x \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

6. Soit x un réel tel que $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$. Alors $\cos x$ vaut

☐ **a.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ☐ **b.** $-\dfrac{1}{3}$ ☐ **c.** $\dfrac{1}{3}$ ☐ **d.** on ne peut pas savoir

7. Sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, le réel $\sin \frac{\pi}{12}$ vaut

☐ **a.** $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ☐ **b.** $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$ ☐ **c.** $\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$ ☐ **d.** $\dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}$

8. La linéarisation de $\cos^2 x$ est

☐ **a.** $\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ ☐ **b.** $\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ ☐ **c.** $2\cos(2x)-1$ ☐ **d.** $1-\sin^2 x$

9. Quelle est la valeur de $\cos^2 \frac{\pi}{8}$?

☐ **a.** $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ ☐ **b.** $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ ☐ **c.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ **d.** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

Récurrence linéaire

Récurrence linéaire d'ordre 1

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle vérifiant la relation $u_{n+1} = 2u_n + 3$ pour tout n. Alors, la suite $t_n \coloneqq u_n - a$ est une suite géométrique lorsque

☐ **a.** $a = 3$ ☐ **b.** $a = -3$ ☐ **c.** $a = 2$ ☐ **d.** $a = 0$

Récurrence linéaire d'ordre 2

1. Quelle relation de récurrence est vérifiée par la suite $u_n \coloneqq 2^n + 3^n$?

☐ **a.** $u_{n+2} \coloneqq 3u_{n+1} + 2u_n$ ☐ **b.** $u_{n+2} \coloneqq 3u_{n+1} - 2u_n$

☐ **c.** $u_{n+2} \coloneqq 5u_{n+1} + 6u_n$ ☐ **d.** $u_{n+2} \coloneqq 5u_{n+1} - 6u_n$

Système linéaire

Système linéaire à q équations et p inconnues

Interprétation géométrique lorsque $p = 2$ ou $p = 3$

4.6 Exercices

Somme et produit

Somme

Exercice 1 : Sommes

Simplifier les sommes suivantes.

$$\textbf{a.}\ \sum_{k=0}^{n} k(k-1), \qquad \textbf{b.}\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1), \qquad \textbf{c.}\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$$

$$\textbf{d.}\ \sum_{k=0}^{n}(k+n), \qquad \textbf{e.}\ \sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{3^{2k-1}}, \qquad \textbf{f.}\ \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 2 : Décomposition en éléments simples

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{a}{3k+1} + \frac{b}{3k+4}.$$

2. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}.$$

Exercice 3 : Sommes

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 4 : Récurrence

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

Exercice 5 : Somme lacunaire de coefficients binomiaux

En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes

$$A_n \coloneqq \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad B_n \coloneqq \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}.$$

Exercice 6 : Coefficients binomiaux

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant p$

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 7 : Coefficients binomiaux

Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Produit

Exercice 8 : Produits

Simplifier les produits suivants en les exprimant le plus possible à l'aide de puissances et de factorielles.

$$\textbf{a. } \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)}, \qquad \textbf{b. } \prod_{k=1}^{n} (-5)^{k^2-k}, \qquad \textbf{c. } \prod_{k=1}^{n} \frac{4^k}{k^2}$$

$$\textbf{d. } \prod_{k=0}^{n} (2k+1), \qquad \textbf{e. } \prod_{k=1}^{n} (4k^2-1), \qquad \textbf{f. } \prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}.$$

Exercice 9 : Produit

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n \coloneqq \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right).$$

Calculer $(1-z)P_n$ et en déduire une expression simple de P_n.

Exercice 10 : Majoration

1. (a) Montrer que

$$\forall k \geqslant 2, \quad 1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}.$$

   (b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant 4.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 11 : Limite

1. Factoriser $k^3 - 1$ par $k - 1$ et $k^3 + 1$ par $k + 1$ pour tout $k \geqslant 2$.
2. En déduire, sans récurrence, que pour tout $n \geqslant 2$

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$

3. En déduire la limite de la suite de terme général

$$u_n \coloneqq \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

Somme et produit doubles

Exercice 12 : Sommes

Simplifier les sommes suivantes.

$$\textbf{a. } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i, \qquad \textbf{b. } \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} j, \qquad \textbf{c. } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$$

$$\textbf{d. } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j}, \qquad \textbf{e. } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}, \qquad \textbf{f. } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i)$$

$$\textbf{g. } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j}, \qquad \textbf{h. } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2, \qquad \textbf{i. } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j).$$

Exercice 13 : Avec des racines n-ièmes

Soit $n \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{C}$. On pose $\omega \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ et

$$S_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \omega^k\right)^n.$$

Calculer S_n.

Exercice 14 : Somme double

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{i-j} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{(i,j) \in [\![0,n]\!]^2 \\ 0 \leqslant i+j \leqslant n}} \binom{n}{i+j}.$$

Exercice 15 : Somme de Gauss

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair. On pose

$$\omega \coloneqq \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}} \quad \text{et} \quad S \coloneqq \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}.$$

1. Écrire $|S|^2$ comme une somme double, puis montrer que

$$|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}.$$

2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   (a) Montrer que la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & \omega^{2pk+p^2} \end{array}$$

   est n-périodique.
   (b) En déduire pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ une écriture simplifiée de

$$\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}.$$

3. Simplifier

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$$

   pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que $|S| = \sqrt{n}$.

Fonction polynôme

Exercice 16 : Polynôme à coefficients symétriques

1. Montrer que le changement de variable $u \coloneqq z + 1/z$ simplifie l'équation

$$z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$$

   en une équation du second degré en u.
2. En déduire l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{C}$.
3. Sur le même modèle, résoudre l'équation

$$z^4 + z^3 - 10z^2 - z + 1 = 0.$$

Exercice 17 : Simplification de racine

On pose

$$a \coloneqq \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}+11}{2}}, \quad b \coloneqq \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}} \quad \text{et} \quad x \coloneqq a-b.$$

On souhaite montrer que $x=1$.

1. Calculer ab.
2. En déduire que x est racine de $A(t) \coloneqq t^5+5t^3+5t-11$.
3. Montrer que 1 est la seule racine positive de A et conclure.

Exercice 18 : Inéquation

Résoudre l'inéquation

$$4x+2 \leqslant \sqrt{7x^3+15x^2+11x+3}.$$

On commencera bien entendu par donner son domaine de définition.

Exercice 19 : Coefficients binomiaux

Écrire la somme

$$\sum_{k=0}^{n}(1+z)^k$$

de deux manières différentes. En déduire

$$\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}.$$

Exercice 20 : Méthode de Cardan

Soit $a,b,c \in \mathbb{C}$ et $Q(z) \coloneqq z^3+az^2+bz+c$.

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{C}$ le polynôme $P(z) \coloneqq Q(z+\alpha)$ n'a-t-il pas de coefficient en z^2 ?

On choisit un tel α et on définit $p,q \in \mathbb{C}$ tels que $P(z)=z^3-3pz+2q$.

2. (a) Soit $u \in \mathbb{C}^*$. Montrer que
$$u+\frac{p}{u}$$
est racine de P si et seulement si $w \coloneqq u^3$ est racine d'un trinôme R que l'on déterminera.
   (b) On note w_1 et w_2 les racines complexes de R. Soit u_1 une racine cubique de w_1. Montrer qu'il existe une unique racine cubique u_2 de w_2 telle que $u_1u_2=p$.
   (c) Déterminer les racines de Q en fonction de α, u_1, u_2 et j.
3. Déterminer les racines des polynômes

$$z^3+3z^2+6z+2, \qquad z^3-3z-1.$$

C'est pour résoudre de telles équations, pour lesquelles P admet trois racines réelles, mais R n'en n'a pas, que Rafael Bombelli *(1526–1572) a introduit les nombres complexes.*

Exercice 21 : Méthode de Ferrari

Soit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ et $P(z) \coloneqq z^4+az^3+bz^2+cz+d$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q(z) \coloneqq P(z+\alpha)$ ne possède pas de terme en z^3.

Pour la suite, α désignera cette valeur. Il existe donc $p,q,r \in \mathbb{C}$ tels que $Q(z)=z^4+pz^2+qz+r$.

2. Soit $v \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad Q(z)=0 \iff \left(z^2+\frac{v}{2}\right)^2=(v-p)\,z^2-qz+\left(\frac{v^2}{4}-r\right).$$

On pose alors $A(z) \coloneqq (v-p)\,z^2-qz+\left(v^2/4-r\right)$.

3. Montrer que A admet une racine double si et seulement si v est racine d'un polynôme B de degré 3 que l'on déterminera.

Pour la suite, on suppose que $P(z) \coloneqq z^4 - 2z^3 + 3z^2 + 4zQ - 10$.

4. Montrer que B admet une racine évidente. En déduire les racines de P.

On a ainsi prouvé, dans les deux exercices précédents, que l'on pouvait calculer les racines des équations de degré 3 et 4 à l'aide de racines n-ièmes de nombres complexes. Ces résultats étaient connus dès le 16e siècle. Niels Abel *(1802–1829), puis* Évariste Galois *(1811–1832), ont démontré qu'il n'était pas possible de résoudre l'équation générale de degré 5 en utilisant des racines n-ièmes de nombres complexes.*

Exercice 22 : Principe du maximum pour les polynômes

Soit $P(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ une fonction polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. On se donne un réel positif M tel que

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad |P(z)| \leqslant M.$$

1. On pose $\omega \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n+1}\right)$. Calculer

$$\sum_{j=0}^{n} P\left(w^j\right).$$

2. En déduire que $|P(0)| \leqslant M$.

Trigonométrie

Égalité modulaire

Formules de trigonométrie

Exercice 23 : Inégalité

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|.$$

Exercice 24 : Équations trigonométriques

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

a. $\cos(3x) = \sin(x)$, **b.** $\cos x + \sin x = 1 + \tan x$, **c.** $\sin x + \sin(2x) = 0$

d. $\tan(2x) = 3\tan x$, **e.** $2\sin x + \sin(3x) = 0$, **f.** $3\tan x = 2\cos x$

g. $\cos x = \sqrt{3}\sin x$, **h.** $2\cos(4x) + \sin x = \sqrt{3}\cos x$.

Exercice 25 : Équations trigonométriques

1. Résoudre les équations

$$\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x), \qquad \cos(5x) + 2\cos(3x) + 3\cos(x) = 0$$

2. Résoudre l'équation

$$\cos(x) + \sin(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

en posant (soigneusement) $t \coloneqq \tan(x/2)$.

Exercice 26 : Calcul de somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{k+1}}\right).$$

Exercice 27 : Mon capitaine

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(k\theta).$$

Récurrence linéaire

Récurrence linéaire d'ordre 1

Exercice 28 : Récurrences d'ordre 1

Déterminer une expression explicite des suites définies par

1. $u_0 \coloneqq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 2u_n + 1$.
2. $u_0 \coloneqq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 3 - \frac{u_n}{2}$.
3. $u_0 \coloneqq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 2u_n^2$.

Récurrence linéaire d'ordre 2

Exercice 29 : Récurrences doubles

Déterminer les suites définies par

$$\textbf{a. } a_0 \coloneqq 0, \quad a_1 \coloneqq -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} \coloneqq 5a_{n+1} - 6a_n,$$
$$\textbf{b. } b_0 \coloneqq 1, \quad b_1 \coloneqq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+2} \coloneqq -b_{n+1} - b_n,$$
$$\textbf{c. } c_0 \coloneqq 1, \quad c_1 \coloneqq -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} \coloneqq 4c_{n+1} - 4c_n + n.$$

Exercice 30 : Récurrence double

Déterminer une expression explicite de la suite (u_n) définie par

$$u_0 \coloneqq 1, \qquad u_1 \coloneqq 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \coloneqq \frac{u_{n+1}^6}{u_n^5}.$$

Exercice 31 : Récurrence double avec second membre polynomial

On dira qu'une suite réelle (u_n) est solution de (E) lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2.$$

1. Montrer que (E) possède une solution de la forme $(an^2 + bn + c)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression explicite de l'unique solution de (E) telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Exercice 32 : Équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(f(x)) = 6x - f(x).$$

Système linéaire

Système linéaire à q équations et p inconnues

Exercice 33 : Résolution de systèmes linéaires

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \\ 3x + 5y + z = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

2. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x + 2y + 3z + 4t = b \\ x + 3y + 6z + 10t = c \\ x + 4y + 10z + 20t = d. \end{cases}$$

Exercice 34 : Équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$

Exercice 35 : Sytème de type Vandermonde

Soit a, b, c trois réels deux à deux distincts. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^4 \\ x + by + b^2 z = b^4 \\ x + cy + c^2 z = c^4. \end{cases}$$

Exercice 36 : Résolution de systèmes linéaires

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système
$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2. \end{cases}$$

2. Soit $m, a, b, c, \in \mathbb{R}$. Résoudre le système
$$\begin{cases} -mx + (m-1)\,y + mz = a \\ (2m-1)\,x + (m-1)\,y - mz = b \\ -2x - 4y + 2mz = c. \end{cases}$$

Exercice 37 : Système linéaire

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + my + z - mt = m + 2 \\ mx - y - mz - t = -1. \end{cases}$$

Exercice 38 : Somme lacunaire de coefficients binomiaux

On définit A, B et C par

$$A \coloneqq \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}, \qquad B \coloneqq \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1\,[3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad C \coloneqq \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 2\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}.$$

1. Calculer $A + B + C$, $A + \mathrm{j}B + \mathrm{j}^2 C$ et $A + \mathrm{j}^2 B + \mathrm{j}C$.
2. En déduire A.
3. Sur le même modèle, étant donnés $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![0, b-1]\!]$, calculer
$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv a\,[b]}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Interprétation géométrique lorsque $p = 2$ ***ou*** $p = 3$