Suites

1 Suite réelle et complexe

Définition

Suite et relation d'ordre

2 Notion de limite

Limite finie

Exercice 1 : Minimum et Maximum

Soit u et v deux suites réelles convergeant respectivement vers l_u et l_v. Montrer que les suites de terme général $\max(u_n, v_n)$ et $\min(u_n, v_n)$ sont convergentes et calculer leurs limites.

Exercice 2 : Plus grand et plus petit élément

Soit (u_n) une suite de réels. On pose

$$A \coloneqq \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

1. On suppose que (u_n) diverge vers $+\infty$. Montrer que A admet un plus petit élément.
2. On suppose que (u_n) converge. Montrer que A admet un plus petit ou un plus grand élément.

Exercice 3 : Quelques calculs de limite

Montrer que les suites suivantes, définies par leur terme général, admettent une limite que l'on calculera.

$$\textbf{a.}\ \frac{\sin(n^3)}{n}, \qquad \textbf{b.}\ \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}, \qquad \textbf{c.}\ \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}, \qquad \textbf{d.}\ \sqrt[n]{3+\sin n},$$

$$\textbf{e.}\ \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \qquad \textbf{f.}\ \operatorname{Arctan}\left(\frac{n^2-n\cos n+(-1)^n}{\ln n+n^2}\right), \qquad \textbf{g.}\ \left(5\sin\frac{1}{n^2}+\frac{1}{5}\cos n\right)^n,$$

$$\textbf{h.}\ \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor, \qquad \textbf{i.}\ \left(a+\frac{b}{n}\right)^n \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont réels et } a \geqslant 0.$$

Exercice 4 : Une manipulation fine d'ε

Soit (u_n) une suite réelle telle que

$$\forall k, n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n} + \frac{1}{k}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que (u_n) converge vers 0 de deux manières distinctes.

1. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \geqslant 1, \quad |u_n| \leqslant \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

   (b) En déduire que (u_n) converge vers 0.
2. Montrer directement ce résultat en choisissant judicieusement k.

Exercice 5 : Théorème de Cesàro

Étant donnée une suite complexe (u_n), on définit la suite (c_n) par

$$\forall n \geqslant 1, \quad c_n \coloneqq \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

appelée moyenne de Cesàro de la suite (u_n).

1. On suppose dans cette question que (u_n) est convergente. Il existe donc $l \in \mathbb{C}$ tel que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

   On souhaite montrer que (c_n) converge vers l.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant N_0, \quad |c_n - l| \leqslant \frac{|u_1 - l| + \cdots + |u_{N_0-1} - l|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

   (b) En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad |c_n - l| \leqslant \varepsilon$$

   et conclure.

2. Réciproquement, on suppose (c_n) convergente. Peut-on en déduire que (u_n) est convergente ?
3. Que dire si (u_n) est une suite réelle divergeant vers $+\infty$?

Exercice 6 : Applications du théorème de Cesàro

Dans cet exercice, on pourra utiliser librement le théorème de Cesàro.

1. Soit (u_n) une suite complexe telle que $u_{n+1} - u_n$ converge vers $l \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

2. Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs convergeant vers un réel $l > 0$. Montrer que

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exercice 7 : Autour de Cesàro

Soit (u_n) une suite complexe convergeant vers $l \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la suite (v_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n := \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ku_k$$

   converge vers $l/2$.

2. Montrer que la suite (w_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n := \frac{\binom{n}{0}u_0 + \binom{n}{1}u_1 + \cdots + \binom{n}{n}u_n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

   converge vers l.

Exercice 8 : Produit de Cauchy

Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes convergeant vers 0. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leqslant M.$$

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Limite infinie

Limite et relation d'ordre

Exercice 9 : Calcul de limite

1. Montrer que
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{p+1} \leqslant \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p}.$$
2. En déduire la limite de la suite de terme général
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Exercice 10 : Calcul de limite

Déterminer les limites des suites de terme général

$$\textbf{a. } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}, \qquad \textbf{b. } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad \textbf{c. } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}, \qquad \textbf{d. } \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}.$$

Exercice 11 : Exercice

Soit (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $[0,1]$ telles que
$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers 1.

Théorèmes usuels et limites usuelles

Suite extraite

Exercice 12 : Suites divergentes

Montrer que les suites suivantes, définies par leur terme général, sont divergentes

$$\textbf{a. } \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right), \qquad \textbf{b. } \frac{5n^2+\sin n}{2(n+1)^2\cos\frac{n\pi}{5}}, \qquad \textbf{c. } \frac{2+n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)}.$$

Exercice 13 : Autour de la notion d'extractrice

1. Soit (u_n) une suite réelle prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que l'on peut en extraire une suite constante.
2. Soit (u_n) une suite réelle ne divergeant pas vers $+\infty$. Montrer que l'on peut en extraire une suite majorée.
3. Soit (u_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes.
   — Il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers l.
   — Quel que soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble
   $$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - l| \leqslant \varepsilon\}$$
   est infini.
   Donner une exemple d'une suite non convergente vérifiant cette propriété.
4. Montrer que de toute suite réelle divergeant vers $+\infty$, on peut extraire une suite croissante.

Exercice 14 : Convergence et suites extraites

1. Soit (u_n) une suite réelle croissante. On suppose que (u_n) admet une suite extraite convergente. Montrer que (u_n) converge.
2. Montrer que si les suites extraites de terme général u_{3n}, u_{3n+1} et u_{3n+2} convergent vers le même complexe l, alors (u_n) converge vers l.
3. On suppose qu'il existe un réel l tel que pour tout entier $k \geqslant 2$, la suite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Peut-on en déduire la convergence de la suite (u_n) ?

3 Propriétés de $\mathbb{R}$

Voisinage

Densité

Exercice 15 : Partie dense

On pose

$$A \coloneqq \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \qquad & nx + my \in A \\ \forall x, y \in A, \qquad & xy \in A. \end{aligned}$$

2. En déduire que la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \coloneqq \left(\sqrt{2} - 1\right)^n$$

   est une suite d'éléments de A convergeant vers 0.
3. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Propriété de la borne supérieure

Exercice 16 : Comparaison de deux ensembles

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(a, b) \in A \times B \quad a \leqslant b$$

1. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
2. Si l'on suppose maintenant que quel que soit $(a, b) \in A \times B$ on a $a < b$, peut-on en conclure que $\sup(A) < \inf(B)$?

Exercice 17 : Borne supérieure

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x - y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 18 : Calcul de bornes supérieures

Déterminer, si elles ou ils existent, les bornes supérieures, bornes inférieures, plus grands éléments, plus petits éléments des parties de $\mathbb{R}$ suivantes.

$$\begin{aligned} A &\coloneqq \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{p} : (n, p) \in {\mathbb{N}^*}^2\right\}, \\ B &\coloneqq \left\{\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}^*\right\}, \\ C &\coloneqq \left\{\frac{1}{n} + (-1)^p : (n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\right\}. \end{aligned}$$

Exercice 19 : Bornes supérieures

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. Soit λ un nombre réel. On pose

$$\begin{aligned} C &\coloneqq \{a + b : a \in A \quad b \in B\}, \\ D &\coloneqq \{\lambda \cdot a : a \in A\}, \\ E &\coloneqq \{a \cdot b : a \in A \quad b \in B\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $\sup(C)$ existe et vaut $\sup(A) + \sup(B)$.
2. Que peut-on dire de l'existence et de la valeur de $\sup(D)$, $\sup(E)$? On pourra formuler des hypothèses supplémentaires adéquates sur A et B.

Exercice 20 : Un théorème de point fixe

Soit $I = [a, b]$ avec $a < b$ et soit $f : I \to I$ une application croissante. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = c$. Considérer pour cela la partie
$$A = \{x \in I \mid f(x) > x\}.$$
Quelle est l'interprétation géométrique de cette propriété en termes du graphe de f ?

4 Suite monotone

Suite monotone

Exercice 21 : Moyenne arithmético-géométrique

Soit a et b deux réels positifs. Soit (u_n) et (v_n) les suites initialisées par $u_0 \coloneqq a$ et $v_0 \coloneqq b$ et définies par la récurrence
$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+1} \coloneqq \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \coloneqq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies, puis que
$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant v_n.$$
   (b) En déduire la monotonie des suites (u_n) et (v_n).
   (c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite que l'on note $M(a, b)$.
2. (a) Calculer $M(0, 1)$ et $M(1, 1)$.
   (b) Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $M(1, x) \leqslant M(1, y)$.

Exercice 22 : Suite définie implicitement

Pour tout $n \geqslant 2$, on définit la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par
$$\forall x \in [0, 1], \quad f_n(x) \coloneqq x^n - nx + 1.$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un unique $x \in [0, 1]$ tel que $f_n(x) = 0$. On note cet élément u_n.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer le signe de $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n)$. En déduire que (u_n) est monotone.
3. Montrer que (u_n) converge vers 0.
4. Montrer que
$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$
   c'est-à-dire que nu_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Étude des suites définies par $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$

Exercice 23 : Quelques applications directes du cours

Étudier les suites (u_n) définies ci-dessous.

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq u_n(1 - u_n)$.
2. $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 2\ln(1 + u_n)$.
3. $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq \frac{3}{2+u_n}$.

Exercice 24 : Un point fixe attractif, puis répulsif

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = a \cdot \frac{1 + a^2}{1 + x^2}.$$
Soit $\alpha \geqslant 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \coloneqq \alpha$ et
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq f(u_n).$$
Le but de cet exercice est d'étudier la convergence éventuelle de la suite (u_n).

1. (a) Étudier la monotonie de f ainsi que la position de son graphe par rapport à la première bissectrice. On montrera en particulier que $x \in \mathbb{R}_+$ est un point fixe de f si et seulement si il est racine de
$$P(x) \coloneqq (x - a)(x^2 + ax + (1 + a^2)).$$

(b) Tracer sur le même dessin le graphe de f ainsi que la première bissectrice.

2. (a) Étudier la monotonie de $f \circ f$.

(b) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+$ est un point fixe de $f \circ f$ si et seulement si il est racine du polynôme

$$Q(x) \coloneqq (x-a)(x^2+ax+(1+a^2))(x^2-a(1+a^2)x+1).$$

(c) Étudier la position du graphe de $f \circ f$ par rapport à la première bissectrice en discutant selon les valeurs de a. Dans les différents cas, on tracera le graphe de $f \circ f$ ainsi que la première bissectrice.

Dans la suite de l'exercice, on définit la suite (v_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \coloneqq u_{2n}.$$

On remarquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$.

3. Montrer que la suite (v_n) est monotone et bornée.
4. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
   (a) Montrer que (v_n) converge et calculer sa limite.
   (b) Qu'en déduire pour la suite (u_n) ?
5. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.
   (a) Si $\alpha < a$, montrer que (v_n) converge vers un réel a_1 strictement inférieur à a. En déduire que la suite (u_n) diverge.
   (b) Que dire si $u_0 > a$? Si $u_0 = a$?

Suites adjacentes

Exercice 25 : Suites adjacentes

Montrer que les suites suivantes sont adjacentes.

$$\textbf{a. } u_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

$$\textbf{b. } u_n \coloneqq \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n \coloneqq \left(1+\frac{1}{n}\right) u_n,$$

Exercice 26 : e est irrationnel

Le but de cet exercice est de montrer que e est un nombre irrationnel.

1. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad v_n \coloneqq u_n + \frac{1}{nn!}.$$

   (a) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
   (b) On note l leur limite commune. On suppose que l est rationnel et on note $l = \frac{p}{q}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}.$$

   (c) Conclure à une absurdité en choisissant $n = q$.
2. Le but de cette question est de montrer que $l = \mathrm{e}$.
   (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t.$$

   (b) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   puis conclure.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Exercice 27 : Récurrence

Soit (u_n) une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}.$$

On définit la suite (m_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n \coloneqq \max(|u_n|, |u_{n+1}|)$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_{n+1} \leqslant \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) m_n.$$

2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n \leqslant \mathrm{e}^2 m_0$$
puis que (u_n) est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe donc une extractice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge.

3. Déterminer un réel a tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leqslant \frac{a}{2^n}.$$

4. En déduire que la suite (u_n) converge.