Séries

1 Série

Série

Exercice 1 : Exercice

Établir la convergence et calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+2)n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(5n+1)}{3^n n!}.$$

Exercice 2 : Exercice

Soit (u_n) une suite positive décroissante tendant vers 0. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

On pourra considérer la suite de terme général $s_{2n} - s_n$. La réciproque est-elle vraie ?

Série à termes positifs

Exercice 3 : Exercice

Soit (u_n) une suite réelle positive, décroissante.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n u_{2^n}$ converge.
2. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de
$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}.$$

Série absolument convergente

Exercice 4 : Exercice

Déterminer la nature des séries suivantes.

$$\sum \frac{\ln(n)}{n^2}, \qquad \sum \frac{n!}{n^n}, \qquad \sum \left[\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right],$$
$$\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}}, \qquad \sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}.$$

Exercice 5 : Exercice

Montrer que la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

converge vers un réel non nul.

Exercice 6 : Exercice

Donner la nature de la série de terme général
$$\frac{n^{2\lambda}}{\lambda^n + \ln n}$$
suivant $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 : Exercice

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Donner la nature de

$$\sum \left(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt[2]{n^2+an+b} \right).$$

Exercice 8 : Exercice

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_r(x) \coloneqq \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}.$$

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la somme $S_r(x)$ est-elle définie ?
2. Calculer $(1-x)S_{r+1}(x)$.
3. En déduire la valeur de $S_r(x)$.

Exercice 9 : Exercice

Montrer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} = n + \frac{1}{2}\ln^2 n + l + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).$$

Série semi-convergente

Exercice 10 : Exercice

On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

1. Montrer que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$
2. Montrer que $\sum u_n$ converge et que $\sum v_n$ diverge.

Exercice 11 : Exercice

Déterminer les suites réelles (v_n) telles que pour toute suite réelle positive (u_n)

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n v_n \text{ converge}.$$