Probabilités

1 Espace probabilisé

Espace probabilisé

Exercice 1 : Exercice

Soit A et B deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\sqrt{\mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(A \cup B)} \leqslant \frac{\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)}{2}$$

et étudier les cas d'égalité.

Exercice 2 : Exercice

On permute aléatoirement les lettres du mot « Baobab ». Avec quelle probabilité le mot obtenu est-il encore « Baobab » ?

Exercice 3 : Exercice

Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance 3 dés simultanément, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, alors que ces deux sommes peuvent être obtenues de 6 manières chacune.

Exercice 4 : Exercice

On lance 4 fois de suite un dé équilibré à 6 faces. Avec quelle probabilité obtient-on :

1. Au moins un 6.
2. Exactement un 6.
3. Au moins 2 faces identiques.

Exercice 5 : Exercice

Dans un lot de 20 yaourts, il y en a 3 qui ont dépassé la date de péremption. On extrait au hasard et simultanément 4 yaourts. Quelle est la probabilité qu'un seul de ces yaourts ait dépassé la date de péremption ?

Exercice 6 : Exercice

On place aléatoirement n boules indiscernables dans n urnes discernables. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

Exercice 7 : Exercice

On lance n fois une pièce équilibrée. On appelle changement un lancer qui donne un résultat différent du précédent. Calculer pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$ la probabilité pour qu'il y ait k changements.

Variable aléatoire

Lois usuelles

Exercice 8 : Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, 6n]\!]$. Déterminer la loi de

$$\cos\left(\frac{X\pi}{3}\right).$$

2 Dépendance des évènements

Probabilité conditionnelle

Exercice 9 : Exercice

Un train contient n places numérotées et n voyageurs possèdent un billet. Le premier voyageur monte dans le train, mais il a oublié son billet et se place donc au hasard. Puis chaque personne s'installe à sa place si elle est libre et choisit une place libre au hasard sinon. Quelle est la probabilité que la dernière personne se trouve à sa place ?

Exercice 10 : Exercice

n personnes numérotées de 1 à n se transmettent dans cet ordre une information binaire. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec la probabilité $p \in]0,1[$ et la transmet fidèlement avec la probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité que l'information correcte parvienne à la n-ième personne ?

Exercice 11 : Exercice

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$ où l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis on réalise p tirages avec remise dans l'urne choisie.

1. Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules blanches ?
2. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 12 : Exercice

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble fixé de cardinal N et $\mathcal{M}$ une partie fixée de $\mathcal{G}$ de cardinal m. L'ensemble des parties de $\mathcal{G}$ est muni de la probabilité uniforme. On fixe $n \leqslant N$.

1. Soit $k \in [\![0, \min(n,m)]\!]$. Quelle est la probabilité p_k qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$ de cardinal n intersecte $\mathcal{M}$ selon un ensemble de cardinal k ?
2. Le cardinal moyen de l'intersection d'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{G}$ de cardinal n avec $\mathcal{M}$ est donc
$$\sum_{k=0}^{\min(n,m)} kp_k.$$
Calculer ce nombre moyen.
3. Un étang contient N grenouilles. On cherche à estimer N. Pour cela, on commence par pêcher m grenouilles que l'on marque puis que l'on rejette à l'eau. Quelques jours plus tard, on pêche n grenouilles. Montrer que l'on peut estimer N.

Exercice 13 : Exercice

On considère une urne contenant n boules numérotées. Les nombres inscrits sur les boules sont des réels deux à deux distincts sur lesquels on ne sait rien de plus. On réalise un tirage sans remise dans l'urne avec l'objectif de déterminer le maximum M des nombres inscrits sur les boules. Comme on n'a pas le temps de tirer toutes les boules (disons que n est trop grand), on opte pour la stratégie suivante : on choisit un entier $p \in [\![1, n-1]\!]$, on tire p boules successivement et sans remise et on mémorise le maximum M_p que l'on a vu parmi ces p boules. On continue alors à tirer des boules, mais on s'arrête dès que l'on a trouvé un nombre supérieur à M_p.

1. Quelle est la probabilité $P_{n,p}$ que l'on trouve ainsi le maximum M.
2. Si $n = 4$, quelle valeur de p a-t-on intérêt à choisir ?
3. Soit $\alpha \in]0,1]$. On choisit p en fonction de n (on le notera donc p_n) de manière à ce que
$$\frac{p_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha.$$
(α représente donc asymptotiquement la proportion de boules que l'on commence par tirer). Montrer que P_{n,p_n} tend vers $-\alpha\ln(\alpha)$ lorsque $n \to +\infty$.
4. Quelle valeur de α a-t-on intérêt à choisir ?

Formule des probabilités totales

Exercice 14 : Monthy Hall

Dans une fête foraine, on vous propose le jeu suivant : trois verres opaques sont retournés devant vous, dont l'un seulement abrite une bille, et vous devez deviner lequel.

1. Quelle est la probabilité de deviner juste ?
2. Pris de pitié devant votre malchance à répétition, le maître du jeu décide de vous donner un coup de pouce. Après votre réponse, il vous indique, parmi les deux verres que vous n'avez pas désignés, une verre qui ne contient pas la bille et vous propose de revoir votre réponse. Préférez-vous confirmer votre réponse initiale ou la modifier ?

Exercice 15 : Exercice

Un horticulteur dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est de $3/4$, celle de donner une fleur blanche est de $1/4$. Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

— Si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$, elle donnera une fleur rose.

— Si l'année n, la plante a donné une fleur blanche, alors l'année $n+1$, elle donnera de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

1. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?
2. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?
3. On note p_n la probabilité de l'évènement « La plante a donné une fleur rose l'année n ». Calculer p_n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16 : Urnes d'Ehrenfest

On considère deux urnes U_1 et U_2. Chaque urne contient une boule. À chaque étape, on choisit une boule au hasard et on la change d'urne. Pour tout $k \in \{0,1,2\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note E_n^k l'évènement « Il y a k boules dans l'urne U_1 après l'étape n ». On note

$$a_n \coloneqq \mathbb{P}\left(E_n^0\right), \quad b_n \coloneqq \mathbb{P}\left(E_n^1\right), \quad c_n \coloneqq \mathbb{P}\left(E_n^2\right), \quad \text{et} \quad X_n \coloneqq (a_n, b_n, c_n)^\top.$$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. Calculer A^2 et A^3.
3. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 17 : Jinko

Jinko le chaton a trois passions dans la vie : Manger, Dormir et Jouer. On peut considérer qu'il pratique ces activités par tranches de 5 minutes.

— Après 5 minutes de repas, il continue de manger les 5 minutes suivantes avec une probabilité de $1/2$. Sinon, il se met à jouer.

— Après 5 minutes de sommeil, il continue de dormir les 5 minutes suivantes avec une probabilité de $3/4$. Sinon, il a faim au réveil et va manger.

— Après 5 minutes de jeu, soit il est en appétit et mange les 5 minutes suivantes avec une probabilité de $1/4$, soit il est fatigué et s'endort.

L'expérience que l'on considère est une journée de Jinko de $5(m+1)$ minutes. Sur la tranche d'indice 0 des 5 premières minutes de la journée, Jinko se lève et va petit-déjeuner. Pour tout $n \in [\![0, m]\!]$, on note $A_n : \Omega \to \{M, D, J\}$ la variable aléatoire donnant l'activité de Jinko sur la tranche de 5 minutes d'indice n de la journée. Pour tout $n \in [\![0, m]\!]$, on pose

$$X_n \coloneqq \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n = M) \\ \mathbb{P}(A_n = D) \\ \mathbb{P}(A_n = J) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in [\![0, m-1]\!], \quad X_{n+1} = BX_n.$$

2. (a) Déterminer les valeurs propres de B, c'est-à-dire les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $B - \lambda I_3$ n'est pas inversible. On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ ces valeurs et on pose $P \coloneqq (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)$.

   (b) Montrer que $P(B) = 0$. En déduire une expression de B^n valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire les limites de

$$\mathbb{P}(A_n = M), \qquad \mathbb{P}(A_n = D), \qquad \mathbb{P}(A_n = J)$$

   lorsque n tend vers $+\infty$.

Formule de Bayes

Exercice 18 : Exercice

On prend un dé au hasard parmi un lot de 100 dés dont on sait que 25 sont pipés : pour ces dés, la probabilité d'obtenir 6 est 1/2.

1. On lance le dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Même question si l'on fait n lancers et que l'on obtient 6 à chaque fois.

Indépendance

Exercice 19 : Exercice

Un concours consiste à passer 3 épreuves indépendantes. On a 80% de chances de réussir l'épreuve 1, 60% pour l'épreuve 2 et 25% pour l'épreuve 3. On est reçu au concours si on réussit au moins deux épreuves sur trois (n'importe lesquelles). Quelle est la probabilité de réussir le concours ?

Exercice 20 : Exercice

On dispose d'un dé à quatre faces non pipé. On réalise n lancers indépendants. On note T l'évènement « Lors des n lancers, les quatre numéros sont sortis ». En utilisant la formule du crible, calculer la probabilité de T, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 21 : Formule du crible

On lance un dé équilibré à 6 faces n fois de suite.

1. Calculer la probabilité de l'événement « La face i n'apparait jamais » pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$.
2. Calculer la probabilité de l'événement « Chacune des faces 1, 2 et 3 apparait au moins une fois ».

Exercice 22 : Secret santa

Les n convives ont tous posé un cadeau près du grand sapin. À minuit, on distribue au hasard un cadeau à chaque convive, éventuellement celui qu'il a apporté.

1. À combien estimez-vous la probabilité de l'événement E_n « Personne n'a reçu son propre cadeau » lorsque n est grand ?

On appelle *dérangement* de $[\![1, n]\!]$ toute permutation sans point fixe de $[\![1, n]\!]$. On notera D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, F_k l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ qui fixent k.

2. Montrer que
$$|D_n| = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
3. Calculer la probabilité de l'événement E_n de la première question, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^x.$$

Loi d'une somme

Exercice 23 : Centre d'appels

Dans un centre d'appels, un employé effectue successivement n appels téléphoniques vers n correspondants distincts dont chacun décroche avec une probabilité $p \in [0, 1]$.

1. Déterminer la loi du nombre N_1 de correspondants qui ont décroché.
2. L'employé rappelle plus tard les $n - N_1$ correspondants qui n'ont pas décroché lors de la première série d'appels. On note N_2 le nombre de correspondants qui ont décroché cette fois. Enfin, on pose $N := N_1 + N_2$. Cette variable aléatoire donne le nombre total de personnes qui ont été contactées avec succès.
   (a) Pour tout $k, i \in [\![0, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(N = k | N_1 = i)$.
   (b) En déduire la loi suivie par N.