Polynômes

1 Arithmétique des polynômes

Relation de divisibilité

Exercice 1 : Racines d'un polynôme

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $P - X$ divise $P \circ P - X$.
2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z^2 - 3z + 1)^2 = 3z^2 - 8z + 2.$$

Exercice 2 : Division euclidienne

1. Trouver le reste et le quotient de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :
   — $A := X^3 - 2X + 1$ et $B := X^2 - 1$
   — $A := X^4 - 2X^3 + 1$ et $B := X + 1$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver les restes de la division de $(X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2$ par $(X-2)(X-3)$, puis par $(X-3)^3$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le reste de la division du polynôme $(\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le reste de la division euclidienne de $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X+1)^2$.

Plus grand commun diviseur

Algorithme d'Euclide

Exercice 3 : Calculs de pgcd

1. Calculer le pgcd des polynômes $X^5 - 4X^4 + 6X^3 - 6X^2 + 5X - 2$ et $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$.
2. Soit p et q deux entiers naturels.
   (a) Calculer le reste de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X^q - 1$.
   (b) En déduire le pgcd de $X^p - 1$ et $X^q - 1$.

Relation de Bézout

Exercice 4 : Calcul de coefficients

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ de polynômes de degrés strictement inférieurs à n tels que
$$(1-X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1.$$
2. Montrer que
$$P(X) = Q(1-X) \quad \text{et} \quad Q(X) = P(1-X).$$
3. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que
$$(1-X)P'(X) - nP(X) = \lambda X^{n-1}.$$
4. En déduire les coefficients de P.

Exercice 5 : Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble

Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose
$$B_k := \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} A_i.$$
Montrer que $B_1, \ldots, B_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Lemme de Gauss

Plus petit commun multiple

Polynôme irréductible

Changement de corps

Exercice 6 : Factorisation sur $\mathbb{Q}[X]$

Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ et P le polynôme

$$P := a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n.$$

1. Montrer que si $r := p/q$ (avec $p \wedge q = 1$) est racine de P, alors $q | a_n$ et $p | a_0$. Que dire si $a_n = 1$?
2. Montrer que si r est une racine de P, alors

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad p - mq | P(m).$$

3. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes

$$X^3 - X - 1, \qquad 3X^3 - 2X^2 - 2X - 5,$$

$$6X^4 + 19X^3 - 7X^2 - 26X + 12.$$

2 Racines d'un polynôme

Racine

Exercice 7 : Racines doubles

Quelles sont les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles le polynôme

$$(X-1)^n - (X^n - 1)$$

admet une racine double ?

Exercice 8 : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$

$$X^3 - 1, \qquad X^6 + 1 \quad \text{et} \quad X^8 + X^4 + 1.$$

Exercice 9 : Polynômes d'interpolation de Hermite

Soit n réels deux à deux distincts $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré strictement inférieur à $2n$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad P(\alpha_k) = a_k \quad \text{et} \quad P'(\alpha_k) = b_k.$$

Exercice 10 : Base de $\mathbb{R}_n[X]$ sans racines

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $\mathbb{R}_n[X]$ admette une base formée de polynômes sans racines réelles.

Exercice 11 : Polynôme scindé

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.

1. Montrer que si P est scindé simple sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé simple sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème fondamental de l'algèbre

Exercice 12 : Résolution d'une équation polynomiale

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X+1).$$

Fonctions symétriques élémentaires

Exercice 13 : Système

1. On note S le système
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=19 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{cases}$$
d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{C}^{*3}$. On se donne $(x,y,z)\in\mathbb{C}^{*3}$ et on pose $P\coloneqq(X-x)(X-y)(X-z)$.
   (a) Si (x,y,z) est solution de S, déterminer explicitement P.
   (b) Résoudre S.
2. Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^3$.
$$\textbf{a.}\ \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ xyz=-2 \end{cases} \qquad \textbf{b.}\ \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}$$

Exercice 14 : Relations entre coefficients et racines

1. Soit p, q et r trois nombres complexes et a,b,c les trois racines du polynôme $P\coloneqq X^3+pX^2+qX+r$. Calculer en fonction de p, q et r l'expression $a^3b+a^3c+b^3c+b^3a+c^3a+c^3b$.
2. On considère le polynôme
$$P\coloneqq X^4+pX^2+qX+r.$$
avec $r\neq 0$. On note $x_1,\dots,x_4$ ses racines. Calculer les expressions suivantes en fonction de p, q et r :
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}+\frac{1}{x_4^2}.$$

Exercice 15 : Calculs trigonométriques

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit le polynôme $P_n\in\mathbb{C}[X]$ par
$$P_n\coloneqq(X+1)^n-(X-1)^n.$$

1. Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
2. En déduire, pour tout $p\in\mathbb{N}$, les valeurs de
$$\sum_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{p}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right).$$

Exercice 16 : Calculs trigonométriques

Soit $n\geqslant 2$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

1. Simplifier
$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$
puis en déduire que
$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}.$$
2. (a) Écrire les racines du polynôme $P\coloneqq(X+1)^n-\mathrm{e}^{2in\theta}$ sous la forme $2u\sin\varphi$ avec $u\in\mathbb{U}$ et $\varphi\in\mathbb{R}$.
   (b) En déduire
$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 17 : Sommes des racines des dérivées successives

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ de degré $n\geqslant 1$. Pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on note s_k la somme des racines complexes de $P^{(k)}$ comptées avec leurs ordres de multiplicité. Montrer que les nombres $s_0,s_1,\dots,s_{n-1}$ sont en progression arithmétique, c'est-à-dire que les différences $s_1-s_0,s_2-s_1,\dots,s_{n-1}-s_{n-2}$ sont égales.