Ordre, récursivité

Exercice 1 : Théorème de Dilworth (Oral ENS LSR 2021)

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné fini non vide, et $<$ la partie irréflexive de $\leqslant$, c'est-à-dire $x < y$ si et seulement si $x \leqslant y$ et $x \neq y$.

1. Pour toute partie $F \subset E$, on dit qu'un élément x de F est *maximal dans* F si x est le seul élément y de F tel que $x \leqslant y$ (je garde la formulation du sujet, même si je ne la trouve pas très heureuse). Soit $Max(F)$ l'ensemble des éléments maximaux de F. Pour tout $x \in E$, soit $E_x := \{y \in E \mid x < y\}$.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que E_x soit vide.
   (b) Montrer que $Max(E_X) \subset Max(E)$.
2. Montrer que $Max(E)$ est non vide.

Une *chaîne* de E est une partie de E dont les éléments sont deux à deux comparables. Une *antichaîne* de E est une partie de E dont les éléments sont deux à deux incomparables.

Dans la suite du problème, on cherche à démontrer le théorème de Dilworth : si k est le maximum des cardinaux des antichaînes de E, alors E est l'union disjointe de k chaînes.

1. Montrer que $Max(E)$ est une antichaîne maximale.
2. Démontrer le théorème de Dilworth quand $k = 1$.
3. On cherche à montrer le théorème de Dilworth par récurrence sur k. On suppose maintenant que $k > 1$. Soient $z \in Max(E)$, $F := E \setminus \{z\}$ et $n \in \mathbb{N}$ le maximum des cardinaux des antichaînes de F. Par hypothèse de récurrence, soient $C_1, \ldots, C_n$ des chaînes disjointes de F d'union F. Donner un encadrement de k en fonction de n.
4. Pour tout entier i compris entre 1 et n, on note D_i l'ensemble des éléments de C_i qui appartiennent à une antichaîne de F de cardinal n.
   (a) Montrer que les D_i sont tous non vides.
   (b) Pour tout i, soit y_i un élément maximal de D_i. Montrer que $\{y_1, \ldots, y_n\}$ est une antichaîne de F.
5. Montrer le théorème de Dilworth.
6. Soient s, t deux entiers naturels non nuls et $\mathcal{I}$ une famille de $st + 1$ intervalles réels. Montrer qu'au moins une des deux propositions suivantes est vraie :
   — Il existe un réel qui appartient à $s + 1$ intervalles de $\mathcal{I}$.
   — Il existe $t + 1$ intervalles de $\mathcal{I}$ qui sont disjoints deux à deux.
7. **Bonus.** Soient toujours s, t deux entiers naturels et $x_1, \ldots, x_{st+1}$ une famille de $st+1$ entiers naturels. Montrer qu'au moins une des deux propositions suivantes est vraie :
   — Il existe $s + 1$ indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{s+1} \leqslant st + 1$ tels que $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{s+1}$.
   — Il existe $t + 1$ indices $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{t+1} \leqslant st + 1$ tels que $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_{s+1}$.
8. Ce dernier résultat vous rappelle-t-il quelque chose ?