Nombres Complexes

1 Le corps des nombres complexes

Définition, conjugaison, module

Exercice 1 : Lieu

1. On note f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ par
$$f(z) := \frac{z+1}{z-2}.$$
Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$ a-t-on $|f(z)| = 1$? $\mathrm{Re}\,(f(z)) = 0$?
2. On note g la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$ par
$$g(z) := \frac{2z-\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}.$$
Pour quels nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$ a-t-on $g(z) \in \mathbb{R}$? $g(z) \in \mathbb{U}$?

Inégalité triangulaire

Exercice 2 : Inégalité

Soit a et b deux nombres complexes.

1. Montrer que
$$|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|\,.$$
2. Déterminer les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 3 : Somme

Soit $z_0, z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{2^k} \neq 0.$$
On pourra commencer par majorer
$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{2^k} \right|.$$

Exercice 4 : Majoration

Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = nz^n.$$
Montrer que $|z| \leqslant 1$.

Puissance entière, binôme de Newton

Exercice 5 : Majorations

1. Soit a et b deux nombres complexes et n un entier naturel non nul. Montrer que si on pose $M := \max(|a|\,, |b|)$, alors
$$|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}\,|a-b|\,.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et n un entier non nul. Montrer que
$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n.$$

2 Forme trigonométrique

Exponentielle $\mathrm{i}\theta$

Application à la trigonométrie

Exercice 6 : Linéarisation

Linéariser l'expression $\cos^2 x \sin^3 x$.

Exercice 7 : Calcul de sommes trigonométriques

On se donne un réel x.

1. Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx), \qquad \sum_{k=0}^{n} k\cos(kx).$$

2. (a) On suppose que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=-k}^{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}lx} = \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2.$$

   (b) Calculer la valeur de cette somme pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ de deux manières distinctes.

Forme trigonométrique

Exercice 8 : Mise sous forme trigonométrique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$z = -\sin 2\theta + 2\mathrm{i}\cos^2\theta.$$

1. Déterminer le module et l'argument de z.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z et $z-1$ aient même module.

Exercice 9 : Calculs

Mettez les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique généralisée

$$\textbf{a. } \left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}, \qquad \textbf{b. } \left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n, \qquad \textbf{c. } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'},$$

$$\textbf{d. } \frac{a+b}{a-b} \quad \text{et} \quad \textbf{e. } \frac{a+b}{1-ab} \qquad \text{où } a := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ et } b := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}.$$

Exponentielle complexe

3 Racines d'un nombre complexe

L'équation du second degré

Exercice 10 : L'équation du second degré

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$\textbf{a. } z^2 = -7+24\mathrm{i}, \qquad \textbf{b. } z^2 = -3-4\mathrm{i}, \qquad \textbf{c. } z^2+z+1=0,$$

$$\textbf{d. } z^2 - 2(2+\mathrm{i})z + 6 + 8\mathrm{i} = 0, \qquad \textbf{e. } \mathrm{i}z^2 + (4\mathrm{i}-3)z + \mathrm{i} - 5 = 0,$$

$$\textbf{f. } z^4 + 2z^3 + z^2 + 2z + 1 = 0 \quad \textit{On pourra poser } u := z + \frac{1}{z},$$

$$\textbf{g. } \begin{cases} z_1 z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3}, \end{cases} \qquad \textbf{h. } \begin{cases} z_1 + z_2 = 1 \\ z_1^2 + z_2^2 = 3. \end{cases}$$

Exercice 11 : Modules et arguments des racines d'un trinôme

Soit u un réel tel que $|u| < \pi$. Calculer les modules et arguments de chacune des racines de l'équation

$$z^2 - 2z(\cos u + \mathrm{i}\sin u) + 2\mathrm{i}\sin u(\cos u + \mathrm{i}\sin u) = 0.$$

Exercice 12 : Trinôme dont les racines ont même module

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Montrer que les racines de $z^2 + az + b = 0$ ont même module si et seulement si il existe $\lambda \in [0, 4]$ tel que $a^2 = \lambda b$.

Racines n-ièmes

Exercice 13 : Équations

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{C}$

$$\textbf{a.}\ z^5 = -1, \qquad \textbf{b.}\ z^6 = \frac{-4}{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}, \qquad \textbf{c.}\ z^3 = \overline{z},$$

$$\textbf{d.}\ (z + \mathrm{i})^n = (z - \mathrm{i})^n, \qquad \textbf{e.}\ 1 + \frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} + \left(\frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\right)^2 + \left(\frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\right)^3 = 0.$$

Exercice 14 : Équation

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation

$$\left(z^2 + 1\right)^n = (z - \mathrm{i})^{2n}.$$

Exercice 15 : Relation trigonométrique

En considérant les racines 11-ièmes de 1, montrer que

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 16 : Calcul avec j

1. Calculer
$$\left(a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2\right)\left(a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j}\right).$$
2. Sans effectuer de développement, retrouver le fait que cette expression ne change pas lorsqu'on échange deux variables.

Exercice 17 : Autour des racines de l'unité

Soit $(\omega_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ les racines n-ièmes de l'unité. Calculer pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^p \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=0}^{n-1} \omega_k.$$

4 Nombres complexes et géométrie plane

Le plan complexe

Exercice 18 : Caractérisation d'un triangle équilatéral

Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c.

1. On suppose que $B \neq A$. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si
$$\frac{c - a}{b - a} = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}} \quad \text{ou} \quad \frac{c - a}{b - a} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}.$$
2. En déduire que ABC est équilatéral si et seulement si
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + cb.$$

Exercice 19 : Triangles équilatéraux

Soit (ABC) et (ADE) deux triangles équilatéraux directs et $(ACFD)$ un parallélogramme. Montrer que (BFE) est équilatéral direct.

Exercice 20 : Algèbre et géométrie

A tout nombre complexe $z \neq 4$, on associe le nombre

$$z' = \frac{\mathrm{i}z - 4}{z - 4}$$

et on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M d'affixe z du plan tels que z' est réel. Déterminer $\mathcal{C}$ par une méthode algébrique puis par une méthode géométrique.

Exercice 21 : Lieu

Soit le point A d'affixe 2 et le point B d'affixe -2. À tout point M d'affixe z, autre que A, on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2z - 4}{\bar{z} - 2}.$$

1. Déterminer $|z|$. Que peut-on en déduire pour M' ?
2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points d'affixe z tels que $M' = B$.
3. Pour tout point M de $\mathcal{E}$ et distincts de A et B, que peut-on dire de

   $$\frac{z - 2}{z' - 2} ?$$

   Interpréter géométriquement ce résultat et en déduire une construction de M'.

Exercice 22 : Triangles

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, z et $\mathrm{i}z$. Déterminer l'ensemble des points B pour lesquels A, B et C sont alignés.
2. On considère les points E, F et G non alignés, d'affixes respectives, z_1, z_2 et z_3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le triangle (EFG) soit rectangle isocèle en E.

Les similitudes directes

Exercice 23 : Similitudes

1. Caractériser géométriquement la similitude

   $$z \mapsto 2(1 + \mathrm{i})z - 7 - 4\mathrm{i}.$$

2. Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/4$.
3. On note r la rotation de centre $2 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/2$ et s la symétrie centrale de centre $1 - \mathrm{i}$. Caractériser géométriquement $s \circ r$.
4. On note r la rotation de centre i et d'angle $\pi/3$ et r' la rotation de centre $2\mathrm{i}$ et d'angle $-\pi/3$. Caractériser géométriquement $r' \circ r$.