Matrices et applications linéaires

1 Matrices, vecteur et application linéaire

Matrice d'une famille de vecteurs

Matrice d'une application linéaire

Exercice 1 : Exemples

Écrire les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques.

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2x) \end{array} \qquad \varphi_b : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1)+P''(1)) \end{array}$$

$$\varphi_c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP + P' + P(1) \end{array}$$

Exercice 2 : Base, noyau et image

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

   Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

   Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

Exercice 3 : Supplémentaire

On pose

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Les sous-espaces $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ sont-ils supplémentaires ?

Exercice 4 : Exercice

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} M^2$ et $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} M^2$.
2. En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles, puis dégager de tout cela une contradiction.

Exercice 5 : Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 = f^3$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que si $\operatorname{rg}(f - \operatorname{Id}) = 2$, alors dans une certaine base de E, f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Plus généralement, montrer que dans une certaine base de E, f a pour matrice

$$0, \qquad I_3, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Exercice

Soit $E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables n fois quel que soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$\mathcal{B} := (\sin, \cos, \sinh, \cosh) \qquad \text{et} \qquad V := \operatorname{Vect} \mathcal{B}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de V.
2. Montrer que V est stable par dérivation.

On note D l'endomorphisme de V dans lui-même qui à f associe f' et M la matrice de D relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Déterminer M.
4. Montrer que D est un automorphisme de V et calculer la matrice de D^{-1} dans la base $\mathcal{B}$.

Matrice de passage, changement de base

Exercice 7 : Calcul de matrices

1. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad u(P) := P' + P.$$

   Écrire la matrice de u dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ avec

$$\mathcal{B}_1 := ((1,2,1), (2,3,3), (3,7,1))$$
$$\mathcal{B}_2 := ((3,1,4), (5,3,2), (1,-1,7))$$

Caractérisation des matrices inversibles

Exercice 8 : Calcul dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

Exercice 9 : Matrices à diagonale dominante

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Rang d'une matrice

Exercice 10 : Calcul de rang et d'inverse

Calculer les rangs des matrices suivantes et calculer leurs inverses quand il y a lieu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 11 : Exercice

1. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
$$X^\top X = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0.$$
2. En déduire que pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\operatorname{Ker}\left(M^\top M\right) = \operatorname{Ker} M$, puis que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\left(M^\top M\right)$.

2 Matrices équivalentes, matrices semblables

Matrices équivalentes

Exercice 12 : Rang

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que
$$\operatorname{rg} B \leqslant \operatorname{rg} A \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\exists Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K}), \quad \exists P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \quad B = QAP\right].$$

Exercice 13 : Étude d'un système affine

Soit a, b, c trois réels deux à deux distincts.

1. Montrer que le système
$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ x + by + b^2 z = 0 \\ x + cy + c^2 z = 0 \end{cases}$$
est de Cramer.
2. Résoudre le système
$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^4 \\ x + by + b^2 z = b^4 \\ x + cy + c^2 z = c^4 \end{cases}$$

Matrices semblables

Exercice 14 : Réduction d'une matrice

Soit A la matrice
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A.
2. Déterminer une matrice diagonale D semblable à A. En déduire un polynôme annulateur non nul de A.
3. Expliciter les suites u, v et w définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} \coloneqq & 2v_n - w_n \\ v_{n+1} \coloneqq & 3u_n - 2v_n \\ w_{n+1} \coloneqq & -2u_n + 2v_n + w_n \end{cases}$$

Exercice 15 : Exercice

1. On note $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f a pour matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. On pose
$$M \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
   (b) Montrer que M est semblable à son inverse.

Exercice 16 : Matrices telles que $M^2 = 0$

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Exercice 17 : Réduction des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence n, c'est-à-dire telle que

$$A^n = 0 \quad \text{et} \quad A^{n-1} \neq 0.$$

Montrer que A est semblable aux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 : Valeurs propres et de AB et BA

On appelle valeur propre d'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout réel λ tel que $X - \lambda I_n$ ne soit pas inversible. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.