Matrices

1 Matrice

Matrice

Matrice carrée

2 Opérations sur les matrices

Combinaison linéaire

Produit

Exercice 1 : Sous-structures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, stable par produit.
2. Les éléments de E commutent-ils entre eux ?
3. Soit $A, B \in E$. Est-il possible d'avoir $AB = 0$ sans que $A = 0$ ou $B = 0$?

Exercice 2 : Produit

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 3 : Corchet de Lie

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et on pose

$$\mathcal{C} \coloneqq \{AD - DA : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\}.$$

1. Montrer que les matrices de $\mathcal{C}$ ont une diagonale nulle.
2. Réciproquement, montrer que toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la diagonale est nulle est dans $\mathcal{C}$.

Exercice 4 : Équation matricielle

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$X + \operatorname{tr}(X)\, A = B.$$

Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 5 : Calcul de puissances successives

Calculer la puissance n-ième des matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Matrices nilpotentes

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent.

1. Montrer que AB est nilpotente.
2. Montrer que $A+B$ est nilpotente.

Exercice 7 : Trace et matrices symétriques

1. Montrer que pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$$\operatorname{tr}\left(X^\top X\right) \geqslant 0.$$

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques.

2. Montrer que
$$\operatorname{tr}\left((AB-BA)^\top (AB-BA)\right) = 2\left[\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right) - \operatorname{tr}(ABAB)\right].$$
3. En déduire que
$$\operatorname{tr}(ABAB) \leqslant \operatorname{tr}\left(A^2B^2\right).$$

Exercice 8 : Norme matricielle

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit $\|A\|$ par
$$\|A\| \coloneqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \qquad \text{et} \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|.$$
2. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que
$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i(A-B)B^{k-1-i}.$$
   (b) En déduire que si $\|A\| \neq \|B\|$
$$\frac{\left\|A^k - B^k\right\|}{\|A-B\|} \leqslant \frac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}.$$

Exercice 9 : Puissances

On pose
$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A^2 est combinaison linéaire de A et I_3, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_3$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Donner une expression explicite de a_n et b_n, puis de A^n.

Matrice inversible

Exercice 10 : Déterminant

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})A + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})I = 0$.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$.

Exercice 11 : Calcul d'inverse

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad a_{i,j} := \begin{cases} a^{j-i} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En introduisant la matrice N définie par

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], \quad n_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

3 Matrice et système linéaire

Interprétation matricielle

Calcul d'inverse, système de Cramer

Exercice 12 : Calcul d'inverse

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

$$\textbf{a.}\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{b.}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textbf{c.}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \textbf{d.}\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{e.}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{f.}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textbf{f.}\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \textbf{d.}\ \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } z \in \mathbb{C}.$$

Exercice 13 : Réduction

On pose

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En déduire 3 matrices colonne $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nulles ainsi que 3 réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et

$$\forall k \in [\![1,3]\!], \quad AX_k = \lambda_k X_k.$$

   On choisira X_1, X_2, X_3 de manière à ce que leur second coefficient soit égal à 1.

Dans la suite, on note $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les vecteurs colonne sont X_1, X_2 et X_3.

2. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
3. Déterminer, sans calcul brutal, une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telle que $AP = PD$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de A^n en fonction de P, D^n et P^{-1}. Puis, déterminer une expression de A^n en fonction de n seulement.

Pivot de Gauss

Exercice 14 : Systèmes linéaires

Soit $p \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\textbf{a.}\ \begin{cases} 2px + y = p \\ 2x + py = p \end{cases} \quad \textbf{b.}\ \begin{cases} x + py + 2z = 1 \\ px + y + 2z = 1 \\ x + 2py + 3z = 0 \end{cases} \quad \textbf{c.}\ \begin{cases} px + py + 4z = 1 \\ 2x + y + pz = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\textbf{d.}\ \begin{cases} x + y + z = 1 - p \\ px + (1+p)y + (1+p)z = p - p^2 \\ px + (1-p)y + (1-p)z = p^2 \end{cases} \quad \textbf{e.}\ \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + py + 6z = 6 \\ -x + 3y + (p-3)z = 0. \end{cases}$$

Exercice 15 : Exercice

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + my + z - mt = m + 2 \\ mx - y - mz - t = -1. \end{cases}$$

Exercice 16 : Exercice

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + \mathrm{j}y + \mathrm{j}^2 z = b \\ x + \mathrm{j}^2 y + \mathrm{j}z = c \end{cases}$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que les solutions soient réelles.

Opérations élémentaires par produit matriciel

Matrice échelonnée