Logique, Ensembles

1 Éléments de logique

Assertion, prédicat

Implication, équivalence

Exercice 1 : Phrases mathématiques

On considère les propositions

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [(\forall y \in \mathbb{R}, \quad xy = 0) \Longrightarrow x = 0]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad [xy = 0 \Longrightarrow x = 0]$.

Sont-elles vraies ou fausses ? Bien entendu, on justifiera.

Exercice 2 : Quantificateurs

Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes, où (u_n) désigne une suite réelle et f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. La suite u est majorée.
2. La suite u n'est pas majorée.
3. La fonction f est nulle.
4. La fonction f n'est pas nulle.
5. La fonction f n'est pas croissante.
6. La fonction f est périodique.
7. La fonction f n'est pas périodique.
8. La fonction f n'est pas paire.
9. La fonction f n'est pas bornée.

Exercice 3 : Autour des suites

Soit (u_n) une suite réelle. Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes

1. $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant A$.
2. $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n > A$.

Que signifient ces énoncés ?

2 Ensemble

Ensemble, élément

Opérations élémentaires

Exercice 4 : Ensembles

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

1. Montrer que
$$A \cap B = A \cup B \Longrightarrow A = B.$$
2. Montrer que
$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

Exercice 5 : Ensembles

Soit E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que les 3 assertions suivantes sont deux à deux équivalentes.

— $A \setminus B \subset C$.
— $A \setminus C \subset B$.
— $A \subset B \cup C$.

Exercice 6 : Équation ensembliste

Soit A, B deux parties de E.

1. On souhaite résoudre l'équation $A \cup X = B$ pour $X \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que si l'équation admet au moins une solution, alors $A \subset B$.
   (b) Montrer que si $A \subset B$, l'ensemble des solutions de l'équation est
   $$\{(B \setminus A) \cup T : T \in \mathcal{P}(A)\}.$$
   (c) Conclure.
2. On souhaite résoudre l'équation $A \cap X = B$ pour $X \in \mathcal{P}(E)$.
   (a) Montrer que si l'équation admet au moins une solution, alors $B \subset A$.
   (b) Montrer que si $B \subset A$, l'ensemble des solutions de l'équation est
   $$\left\{B \cup T : T \in \mathcal{P}(\bar{A})\right\}.$$
   (c) Conclure.

Exercice 7 : Équation ensembliste

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. Discuter et résoudre l'équation
$$(A \cap X) \cup (B \cap X^c) = \varnothing.$$

3 Application

Définition, exemples

Exercice 8 : Différence symétrique

Soit E un ensemble. Quels que soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la différence symétrique $A \Delta B$ entre A et B par
$$A \Delta B \coloneqq (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Déterminer $A \Delta B$ dans les deux exemples suivants.
   — $E \coloneqq \{1, 2, 3, 4\}$, $A \coloneqq \{1, 2\}$, $B \coloneqq \{1, 3\}$.
   — $E \coloneqq \mathbb{R}$, $A \coloneqq]-\infty, 2]$, $B \coloneqq [1, +\infty[$.
2. Montrer que
   $$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right).$$
3. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$
   $$\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B.$$
4. En déduire que la loi Δ est associative sur $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire que
   $$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), \quad A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

Application injective, surjective, bijective

Exercice 9 : Fonction de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$

Soit f la fonction
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z - \dfrac{1}{z} \end{array}$$

1. Montrer que f est surjective mais non injective.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathrm{i}\mathbb{R})$.
3. Déterminer $f(\mathbb{U})$.

Exercice 10 : Fonction de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$

Soit f la fonction
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & \left(u^2 + v^2, uv\right) \end{array}$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer les antécédents de $(3 - 2\mathrm{i}, 3 + \mathrm{i})$ par f.

Exercice 11 : Injection, surjection

Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$.

1. Montrer que si $f \circ g \circ f = f$ et que f est injective, alors g est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f \circ g = g$ et que g est surjective, alors f est injective.

Exercice 12 : Image directe, image réciproque

Soit $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que

$$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

Exercice 13 : Une bijection de $[0,1]$ dans $]0,1[$

Montrer que la fonction $f : [0,1] \to]0,1[$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

est une bijection.

Exercice 14 : Application ensembliste

Soit A et B deux parties de E et

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.
3. On suppose que f est bijective. Calculer f^{-1}.

Exercice 15 : Application fonctionnelle

Soit f une application de E dans E et φ l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E,E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,E) \\ g & \longmapsto & g \circ f. \end{array}$$

Montrer que φ est bijective si et seulement si f l'est.

Exercice 16 : Haskell Curry

Soit A, B, C trois ensembles. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A \times B, C) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B,C)) \\ f & \longmapsto & \varphi(f) : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{F}(B,C) \\ a & \longmapsto & [\varphi(f)](a) : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ b & \longmapsto & f(a,b) \end{array} \end{array} \end{array}$$

est bijective.

Exercice 17 : Il n'y a pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$

Montrons que si E est un ensemble, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une surjection φ de E dans $\mathcal{P}(E)$. Conclure a une absurdité en considérant

$$A \coloneqq \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Exercice 18 : Composition, injection et surjection

1. Soit A, B, C, D quatre ensembles, $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ trois applications telles que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.
2. Soit X, Y, Z trois ensembles et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to X$ trois applications. On forme les applications composées $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$. On suppose que deux d'entre elles sont surjectives et la troisième injective. Montrer qu'alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 19 : Inversion à droite, à gauche d'une application

Soit f une application de A dans B.

1. (a) Montrer que f est surjective si et seulement si il existe une application g de B dans A telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$.
   (b) Dans le cas où f est surjective, montrer que g est unique si et seulement si f est bijective.
2. (a) Montrer que f est injective si et seulement si il existe une application g de B dans A telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$.
   (b) Dans le cas où f est injective, montrer que g est unique si et seulement si f est bijective.

Exercice 20 : Image directe et réciproque

Soit f une application de A dans B.

1. Montrer que f est surjective si et seulement si quelle que soit la partie Y de B, on a $f(f^{-1}(Y)) = Y$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si quelle que soit la partie X de A, on a $f^{-1}(f(X)) = X$.

Exercice 21 : Application

Soit E un ensemble et f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 22 : Application

Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F, et g une application de F dans E. On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective. Montrer que f et g sont bijectives.

Familles

Exercice 23 : Partition

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{1, 2, 3\}$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $A_i \coloneqq \{f \in E \mid f(0) = i\}$. Montrer que les A_i forment une partition de E.

4 Relation binaire

Relation d'ordre

Exercice 24 : Ordre sur $\mathbb{N}^*$

On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad n\mathcal{R}m \quad \Longleftrightarrow \quad [\exists q \in \mathbb{N}^*, \quad m = n^q] .$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Est-ce que $\mathcal{R}$ est totale ?

Exercice 25 : Plus grand, plus petit élément

Montrer que si E est un ensemble ordonné dont l'ordre est total, toute partie finie de E admet un plus petit et un plus grand élément. Que dire si l'ordre n'est pas total ?

Exercice 26 : Applications croissantes

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Une application f de E dans E est dite croissante lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad x \preceq y \Longrightarrow f(x) \preceq f(y).$$

1. Montrer que la composée de deux applications croissantes est croissante.
2. Montrer que si E est totalement ordonné, l'application réciproque d'une bijection croissante est croissante.

Relation d'équivalence

Exercice 27 : Relation sur $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x = y^2 - 2y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 28 : Factorisation canonique

Soit f une application de A dans B et $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur A par

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \mathcal{R} x_2 \iff f(x_1) = f(x_2).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que les classes d'équivalence sont les images réciproques des $\{y\}$ pour $y \in f(A)$.

On appelle ensemble quotient $A/\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.

3. Soit s l'application de A dans $A/\mathcal{R}$ qui à x associe la classe de x. Montrer que s est une surjection appelée surjection canonique.
4. Soit i l'application de $f(A)$ dans B qui à y associe y. Montrer que i est une injection appelée injection canonique.
5. Montrer qu'il existe une et une seule application $\bar{f}$ de $A/\mathcal{R}$ dans $f(A)$ telle que $f = i \circ \bar{f} \circ s$. Montrer que $\bar{f}$ est une bijection.
6. Soit C un ensemble et g une application de A dans C. Montrer qu'il existe une application $\bar{g}$ de $A/\mathcal{R}$ dans C telle que $g = \bar{g} \circ s$ si seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \mathcal{R} x_2 \Longrightarrow g(x_1) = g(x_2).$$

5 L'ensemble des entiers naturels

Récurrence

Exercice 29 : Inégalité

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leqslant \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

Exercice 30 : Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 \coloneqq 0, \quad F_1 \coloneqq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} \coloneqq F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \geqslant n - 1.$
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}.$
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2 \quad \text{et} \quad F_{2n+2} = F_{n+2}^2 - F_n^2.$$

Exercice 31 : Inégalité sur Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 \coloneqq 1, \quad F_1 \coloneqq 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} \coloneqq F_{n+1} + F_n.$$

Déterminer les $r \in \mathbb{R}_+^*$ tels qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n \leqslant \alpha r^n.$$

Exercice 32 : Inégalité

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Exercice 33 : Injections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$

Déterminer les injections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \leqslant n.$$

Exercice 34 : Équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que

$$(E) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) + (f \circ f)(n) = 2n.$$

1. Déterminer une fonction vérifiant (E).
2. Réciproquement, soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant (E).
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n$. Conclure.

Exercice 35 : Équation fonctionnelle

Montrer qu'il existe une unique bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(n) - n| = 1.$$

Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$?

Exercice 36 : Les crayons de couleur

Nous allons démontrer que toute boite de crayons de couleur ne possède que des crayons de la même couleur. Pour cela, on procède par récurrence sur le nombre n de crayons. L'initialisation est évidente car une boite ne contenant qu'un crayon ne possède que des crayons de la même couleur. Pour l'hérédité, supposons que le résultat est vrai pour n crayons et considérons une boite de $n + 1$ crayons de couleur. On enlève le premier crayon. Par hypothèse de récurrence, tous les autres crayons ont la même couleur. On replace le premier crayon et on enlève le dernier crayon. De même, tous les autres crayons ont la même couleur. On en déduit que les $n+1$ crayons ont la même couleur.

Quelle est l'erreur de ce raisonnement ?

Exercice 37 : Les Moines

Dans un camp de bouddhistes, on apprend qu'il y a au moins un malade. Cette maladie n'est pas contagieuse ni évolutive (le nombre de malades n'évoluera plus). Afin de préserver une entière pureté et ne pas perturber les méditations, un bouddhiste qui se sait malade doit partir. Cette maladie se caractérise uniquement par une tâche rouge sur le front. Un symptôme qui leur permet de reconnaître sans hésitation si une personne est malade. Le problème est qu'il n'y a aucun moyen pour un bouddhiste de se voir. Il n'y a aucun miroir ou autre moyen permettant de voir son propre front. De plus, les moines bouddhistes ont fait le vœu de silence et ne communiquent d'aucune façon. Ils ne font que méditer, lire et ont un esprit très logique. Ils se réunissent tous une seule fois par jour au lever du soleil pour une méditation commune de 3 heures. Pendant ces trois heures, ils n'ont toujours pas le droit de communiquer entre eux ni de partir avant la fin de la séance commune. Au bout de 5 jours, tous les malades sont partis. Combien y avait-il de moines malades ?

Définition par récurrence

Exercice 38 : Suite définie par récurrence

Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1}} + u_n\right].$$