Intégration

1 Intégration

Fonction en escalier

Fonction continue par morceaux

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Exercice 1 : Calcul de quelques intégrales

Calculer les intégrales suivantes

$$\textbf{a.}\ \int_0^1 \min(t, 1-2t^2)\,\mathrm{d}t, \qquad \textbf{b.}\ \int_0^1 |3t-1|\,\mathrm{d}t,$$

$$\textbf{c.}\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{d.}\ \int_0^1 \sin\frac{\lfloor x\rfloor\pi}{4}\,\mathrm{d}x.$$

Positivité de l'intégrale

Exercice 2 : Calcul de limites

1. Calculer les limites des expressions suivantes lorsque n tend vers $+\infty$

$$\int_0^1 x^n\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x.$$

2. Calculer la limite de

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,\mathrm{d}x$$

lorsque a tend vers 0.

Exercice 3 : Calcul de limites

1. (a) Donner la limite, lorsque t tend vers 1 de

$$\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t\ln t}.$$

   (b) En déduire la limite lorsque x tend vers 1 de

$$\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

2. Donner la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 : Point fixe

Soit $f : [0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=c$.

Exercice 5 : Calcul de limite

Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs strictement positives. Pour tout $\alpha > 0$, on définit

$$I(\alpha) \coloneqq \left(\int_0^1 f^\alpha(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1. Montrer que $I(\alpha)$ converge vers la borne supérieure de f lorsque α tend vers $+\infty$.
2. Le but de cet question est de montrer que lorsque α tend vers 0, $I(\alpha)$ tend vers

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\,\mathrm{d}t\right).$$

   (a) On suppose dans cette question que $\forall x \in [0,1]\,, \quad f(x) \geqslant 1$.

      i. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,\eta]\,, \quad 1 + (1-\varepsilon)x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + (1+\varepsilon)x.$$

      ii. En déduire qu'il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\forall \alpha \in \left]0,\eta'\right]\,, \quad 1 + (1-\varepsilon)\alpha\ln(f(t)) \leqslant f^\alpha(t) \leqslant 1 + (1+\varepsilon)\alpha\ln(f(t)).$$

      iii. Conclure

   (b) Montrer le cas général.

Inégalité triangulaire

Exercice 6 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On définit la fonction g d'expression

$$g(x) \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1 + x\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est définie sur $\left]-1,+\infty\right[$.
2. Montrer que g est décroissante.
3. Étant donné $a > -1$, montrer que g est lipschitzienne sur $\left[a,+\infty\right[$. En déduire que g est continue sur $\left]-1,+\infty\right[$.
4. Montrer que g est dérivable sur $\left]-1,+\infty\right[$ et que

$$\forall x \in \left]-1,+\infty\right[\,, \quad g'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)\sin t}{(1 + x\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 : Égalité dans l'inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$. On suppose que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que :

1. Si f est réelle, f garde un signe constant.
2. Si f est complexe, f garde un argument constant.

Exercice 8 : Inégalité sur une intégrale

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$M \coloneqq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|\,.$$

Montrer que

$$\left|\int_0^1 (f(x) + xf(1-x))\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{3}{2}M.$$

Somme de Riemann

Exercice 9 : Calcul de limites

Étudier la convergence des suites de terme général

$$\textbf{a.}\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right),\qquad \textbf{b.}\ n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2},\qquad \textbf{c.}\ \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k},$$

$$\textbf{d.}\ \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)},\qquad \textbf{e.}\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}.$$

Exercice 10 : Calcul de limites

1. Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad x^2-\frac{1}{3}x^4\leqslant\sin^2(x)\leqslant x^2.$$
2. En déduire la limite de la suite de terme général
$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right).$$

Exercice 11 : Calcul de limites

Soit $f\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right).$$

2 Intégration et dérivation

Continuité et dérivabilité

Exercice 12 : Fonction d'intégrale nulle

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On suppose que quels que soient a et b dans I

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0.$$

Montrer que f est nulle.

Exercice 13 : Inégalité de Gronwall

1. Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un nombre réel k positif tel que
$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad f(x)\leqslant k\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que la fonction f est nulle.
2. Soit $c\in\mathbb{R}_+$, u et v deux applications continues et positives de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad u(x)\leqslant c+\int_0^x u(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad u(x)\leqslant c\exp\left(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 14 : Étude de fonctions

Étudier le domaine de définition, les symétries, la monotonie et les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions d'expressions

$$\textbf{a.}\ x\mapsto\int_1^{1+x^2}\ln(t)\,\mathrm{d}t,\qquad \textbf{b.}\ x\mapsto\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)},$$

$$\textbf{c.}\ x\mapsto\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)},\qquad \textbf{d.}\ x\mapsto\int_x^{2x}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Primitive

Exercice 15 : Calcul de primitives

Donner le domaine de définition et calculer les primitives suivantes :

$$\textbf{a.} \int \left(x^2+x+1\right) \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{b.} \int \left(x^2-1\right) \cos x \,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{c.} \int x^3 \ln x \,\mathrm{d}x,$$

$$\textbf{d.} \int \sin^2 x \cos^3 x \,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{e.} \int \sin x \cos^2 x \,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{f.} \int \sin^2 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x,$$

$$\textbf{g.} \int \frac{x}{x^2+1} \,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{h.} \int \frac{1}{x \ln x} \,\mathrm{d}x, \qquad \textbf{i.}\ I_n = \int \ln^n x \,\mathrm{d}x \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}).$$

Calcul d'intégrales

Exercice 16 : Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n et J_n par

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
2. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont positives et décroissantes. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$
5. En déduire que
$$I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Exercice 17 : Lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

1. En effectuant une intégration par parties, montrer que le résultat est vrai lorsque f est supposé $\mathcal{C}^1$.
2. Le but de cette question est de démontrer que le résultat est vrai dans le cas général.
   (a) Montrer que le résultat est vrai lorsque f est une fonction en escalier.
   (b) En déduire le cas général.

Exercice 18 : Calcul de $\zeta(2)$

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que $P(0) = 0$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^\pi P(t) \cos(kt) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^2}.$$

On définit la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

et on souhaite montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$.

2. On définit la fonction $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ par $h(0) := -2$ et
$$\forall t \in]0, \pi], \quad h(t) := \frac{\frac{1}{2\pi} t^2 - t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

   Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \int_0^\pi h(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) \mathrm{d}t.$$

3. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, puis que

$$\int_0^\pi h(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et conclure.

Exercice 19 : Généralisation du lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux et T-périodique. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_a^b f(t)g\left(nt\right)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer le résultat lorsque f est constante puis lorsque f est une fonction en escalier.
2. En déduire le résultat général.
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On définit la suite (u_n) par

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \coloneqq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f\left(0\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}f\left(1\right)\right).$$

(a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\frac{k+1}{n} - t\right)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire que

$$u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 20 : Limite différentielle

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f'(x) + f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

1. On note ε la fonction $\varepsilon \coloneqq f + f'$. Montrer que si a est un réel

$$f(x) = f(a)\mathrm{e}^{a-x} + \mathrm{e}^{-x}\int_a^x \varepsilon(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

2. Conclure.
3. Que dire si la condition de départ est changée en

$$f'(x) + \lambda f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,$$

où λ est un réel ?

Formules de Taylor

Exercice 21 : Suite

1. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$

$$|\mathrm{e}^x - 1 - x| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}x^2.$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général

$$u_n \coloneqq \left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{n+k}}\right) - n.$$

Exercice 22 : Calcul numérique

Donner une majoration de l'erreur commise en prenant $x - \frac{x^2}{2}$ comme valeur approchée de $\ln(1+x)$. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.