Groupes

1 Groupe

Loi de composition interne

Exercice 1 : Loi de composition interne

1. Déterminer les propriétés de la loi de composition interne $\perp$ sur $\mathbb{Q}$ définie par
$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, \quad a \perp b := a + b + ab.$$
2. Faire de même avec la loi ∇ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par
$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad (a,b)\nabla(c,d) := \left(ac, \frac{d}{a} + bc\right).$$

Groupe

Exercice 2 : Transport de structure

1. Soit $(G, \square)$ un groupe et H un ensemble tel qu'il existe une fonction $f : H \to G$ bijective. On définit la loi $\star$ sur H par
$$\forall x, y \in H, \quad x \star y := f^{-1}\left(f(x) \square f(y)\right).$$
Montrer que $(H, \star)$ est un groupe isomorphe à $(G, \square)$.
2. On définit la loi $\oplus$ sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \oplus y := \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$
Montrer que $(\mathbb{R}, \oplus)$ est un groupe commutatif.

Exercice 3 : Sous groupe et permutations

Soit E un ensemble et A une partie de E. On note $\mathcal{S}(A)$ l'ensemble des permutations f de E qui laissent la partie A invariante, c'est-à-dire telles que $f(A) = A$. Montrer que $\mathcal{S}(A)$ est un sous-groupe de $(\sigma(E), \circ)$.

Exercice 4 : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que
$$a\mathbb{Z} := \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$$
est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.

Le but de cet exercice est de montrer que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit de cette forme, soit dense dans $\mathbb{R}$. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ distinct de $\{0\}$. On pose $a := \inf\left(G \cap \mathbb{R}_+^*\right)$.

2. Montrer que a est bien défini.
3. Dans cette question on suppose que $a > 0$.
   (a) Montrer que $a \in G$.
   (b) En déduire que $G = a\mathbb{Z}$.
4. Montrer que si $a = 0$, G est dense dans $\mathbb{R}$.

On résume les conclusions des questions précédentes en disant que les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont soit discrets soit denses dans $\mathbb{R}$.

5. Soit a et b deux réels non nuls tels que $a/b \notin \mathbb{Q}$. Montrer que
$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{na + mb : n, m \in \mathbb{Z}\}$$
est dense dans $\mathbb{R}$.
6. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'un réel T est une période de f lorsque
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x).$$
   (a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des périodes de f est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
   (b) On suppose que f est non constante et périodique. Montrer qu'il existe un unique $T_0 > 0$ tel que $\mathcal{P} = T_0\mathbb{Z}$.

Exercice 5 : Sous-groupe de $\mathbb{U}$

Montrer que $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe strict de $(\mathbb{U},\cdot)$.

Exercice 6 : Union de deux sous-groupes

Soit $(G,*)$ un groupe, et H et K deux sous-groupes de G. Montrer que $H\cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H\subset K$ ou $K\subset H$.

Exercice 7 : Groupes tels que $x^2=e$

Soit $(G,\star)$ un groupe tel que
$$\forall x\in G,\quad x^2=e.$$
Montrer que G est commutatif.

Exercice 8 : Action d'un groupe sur lui-même

Soit $(G,\star)$ un groupe, dont l'élément neutre est noté e. Pour $a\in G$, on définit les applications γ_a et τ_a de G dans lui-même par les formules
$$\forall g\in G,\quad \gamma_a(g)\coloneqq a\star g\quad\text{et}\quad \tau_a(g)\coloneqq a\star g\star a^{-1}.$$

1. Montrer que γ_a et τ_a sont des bijections. Montrer que τ_a est un automorphisme de G. Que dire de γ_a ?
2. Pour a et b éléments quelconques de G, calculer $\tau_a\circ\tau_b$. Retrouver le fait que τ_a est un automorphisme de G, et donner une autre expression de $(\tau_a)^{-1}$.
3. On note $\mathrm{Int}(G)$ le sous ensemble de $\mathrm{Aut}(G)$ formé des applications τ_a pour $a\in G$. Ce sont les automorphismes dits *intérieurs* de G. Montrer que l'application
$$\varphi:\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G)\\ a & \longmapsto & \tau_a\end{array}$$
est un morphisme du groupe $(G,\star)$ dans le groupe $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$, et en déduire que $\mathrm{Int}(G)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{Aut}(G),\circ)$.

Exercice 9 : Groupe diédral

Pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$, on pose
$$\varphi_{a,b}:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & az+b\end{array}$$
et on pose $A^+\coloneqq\{\varphi_{a,b}:(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\}$. On pose enfin
$$s:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & \overline{z}\end{array}$$

1. (a) Montrer que A^+ est un sous-groupe de $(\sigma(\mathbb{C}),\circ)$.
   (b) On pose $A\coloneqq A^+\cup A^+s$ où $A^+s\coloneqq\{f\circ s:f\in A^+\}$. Montrer que A est un sous-groupe de $(\sigma(\mathbb{C}),\circ)$.
2. Soit $n\geqslant 2$. On note D_n l'ensemble des fonctions $f\in A$ pour lesquelles $f(\mathbb{U}_n)\subset\mathbb{U}_n$.
   (a) Montrer que si $f\in D_n$ l'application induite à $\mathbb{U}_n$ est bijective.
   (b) Montrer que D_n est un sous-groupe de A. On l'appelle *groupe diédral de degré n*.
   (c) Montrer que D_n contient s ainsi que
$$r:\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}z\end{array}$$
   (d) Que vaut la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$? En déduire que 0 est point fixe de tout élément de D_n.
   (e) Montrer que
$$D_n=\left\{r^k:k\in[\![0,n[\![\right\}\cup\left\{r^k\circ s:k\in[\![0,n[\![\right\}$$
   puis décrire géométriquement les éléments de D_n.

Ordre d'un élément

Exercice 10 : Théorème de Lagrange

Soit $(G, \star)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G. On souhaite montrer que $\mathrm{Card}(H)$ divise $\mathrm{Card}(G)$. Pour cela, on introduit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par

$$\forall x, y \in G, \quad x\mathcal{R}y \iff yx^{-1} \in H.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Soit $x \in G$. Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & H & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(x) \\ & h & \longmapsto & hx \end{array}$$
est une bijection.
3. Conclure.

Exercice 11 : Existence d'un élément d'ordre 2

Soit $(G, \star)$ un groupe fini de cardinal pair. Le but de cet exercice est de montrer qu'il possède un élément d'ordre 2. Pour cela, on considère l'ensemble

$$E := \{x \in G \mid x^2 \neq e\}.$$

1. Montrer que : $\forall x \in E, \quad x^{-1} \in E$.
2. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur E par
$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \iff y = x \quad \text{ou} \quad y = x^{-1}.$$
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Quel est le cardinal de chacune de ses classes d'équivalence ?
3. Conclure.

On peut généraliser ce résultat en montrant que si p est un nombre premier divisant l'ordre de G, ce dernier possède un élément d'ordre p. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Sylow.

Exercice 12 : Les groupes d'ordre inférieur à 5 sont commutatifs

1. Soit $(G, \star)$ un groupe fini dont le cardinal p est un nombre premier et $x \in G \setminus \{e\}$. Montrer que
$$G = \{x^k : k \in [\![0, p-1]\!]\}$$
puis en déduire que G est commutatif.
2. Montrer que les groupes finis de cardinal inférieur ou égal à 5 sont commutatifs.
On montrera qu'il n'y a que deux tables possibles pour les groupes de cardinal 4.
3. Donner un exemple de groupe de cardinal 6 non commutatif.

2 Groupe symétrique

Groupe symétrique

Décomposition en cycles à supports disjoints

Exercice 13 : Décomposition en produit de cycles

Décomposer la permutation suivante en produit de cycles de support disjoints.

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 7 & 10 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

En déduire sa signature.

Exercice 14 : Exercice

Déterminer l'ordre maximal d'un élément de $\mathcal{S}_{10}$.

Signature, groupe alterné

Exercice 15 : Générateurs du groupe symétrique

1. Montrer que les transpositions $(1 \quad i)$ (pour $i \in [\![2, n]\!]$) engendrent le groupe symétrique $(\mathcal{S}_n, \circ)$.
2. Montrer que les cycles de longueur 3 engendrent $(\mathcal{A}_n, \circ)$.

Exercice 16 : Exercice

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un morphisme injectif de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathcal{A}_{n+2}, \circ)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de morphisme injectif de $(\mathcal{S}_4, \circ)$ dans $(\mathcal{A}_5, \circ)$.

Exercice 17 : Définition de la signature

Soit $n \geqslant 2$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe deux et seulement deux morphismes de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

— L'application $\bar{1}$ qui a toute permutation σ associe 1.

— Un autre morphisme ϵ que l'on définira comme étant la signature.

1. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe au plus un seul morphisme φ de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ différent de $\bar{1}$. Soit φ un morphisme de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   (a) Soit τ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau) \in \{-1, 1\}$.
   (b) En déduire que φ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.
   (c) Soit τ_1 et τ_2 deux transpositions.
      i. Montrer que τ_1 et τ_2 sont conjuguées, c'est-à-dire qu'il existe une permutation σ telle que
      $$\tau_2 = \sigma \tau_1 \sigma^{-1}$$
      ii. En déduire que $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$.
   (d) Conclure
2. Le but de cette partie est de montrer l'existence d'un morphisme de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ différent de $\bar{1}$.
   On dit qu'une partie A de $[\![1, n]\!]^2$ est une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$ lorsque
   $$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \begin{cases} (i,j) \in A \Longrightarrow (j,i) \notin A \\ i \neq j \Longrightarrow [(i,j) \in A \quad \text{ou} \quad (j,i) \in A] \end{cases}$$
   (a) Soit A une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$ et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Montrer que :
   $$\sigma(A) := \{(\sigma(i), \sigma(j)) : (i,j) \in A\}$$
   est une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
   (b) Soit A une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$ et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. On note n_A le nombre d'inversions de σ, c'est-à-dire le nombre d'éléments (i, j) de A tels que $j - i$ et $\sigma(j) - \sigma(i)$ soient de signes distincts. On définit alors la signature de σ par
   $$\epsilon(\sigma) := (-1)^{n_A}$$
      i. Montrer que la signature ne dépend pas du choix de A.
      ii. Montrer que :
      $$\epsilon(\sigma) = \prod_{(i,j) \in A} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$
      iii. En déduire que ϵ est un morphisme de groupe
   (c) Montrer que ϵ est différent de $\bar{1}$ et conclure.
3. En déduire qu'il existe un unique morphisme de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ qui vaut -1 sur les transpositions. Ce morphisme est appelé signature.