TD : Exercices sur les graphes

1 Exercices sur les graphes

Exercice 1 : Exercice

Un graphe non étiqueté est, comme son nom l'indique, un graphe dans lequel les sommets ne portent pas d'étiquettes : autrement dit, c'est une classe d'isomorphisme de graphes étiquetés.

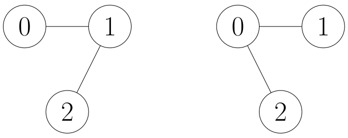

FIGURE 1 – Deux graphes étiquetés distincts.

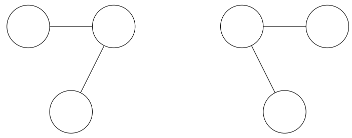

FIGURE 2 – Deux graphes non étiquetés identiques.

1. Combien y a-t-il de graphes étiquetés par $[\![1, n]\!]$?
2. Combien y a-t-il de graphes étiquetés par $[\![1, n]\!]$ à p arêtes ?
3. Déterminer le nombre de graphes non étiquetés à 3 sommets.
4. Énumérer les 11 graphes non étiquetés à 4 sommets.

Il n'y a pas de formule close ni même de relation de récurrence simple pour le nombre de graphes non étiquetés à n sommets.

Exercice 2 : Exercice

Montrer qu'un graphe non orienté a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice 3 : Nombre de chemins de longueur n

On considère un graphe orienté défini par sa matrice d'adjacence $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{B})$, et l'on note $c_{i,j,n}$ le nombre de chemins de longueur n du sommet i vers le sommet j. On définit également les matrices $A_n = (c_{i,j,n})$.

1. Expliciter les matrices A_0 et A_1.
2. Trouver une relation de récurrence reliant $c_{i,j,n+1}$ aux $c_{i,k,n}$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$.
3. En déduire une expression simple de A_n en fonction de M et de n.
4. À quelle condition la matrice d'adjacence d'un graphe orienté est-elle nilpotente ?

Exercice 4 : Suites graphiques

Une suite finie $(d_1, \ldots, d_n)$ d'entiers naturels est dite *graphique* s'il existe un graphe G à n sommets $x_1, \ldots, x_n$ tel que $\deg x_i = d_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Le *problème de la réalisation d'un graphe* consiste à déterminer si une suite donnée est graphique.

1. Soit $A = (s, t_1, \ldots, t_s, d_1, \ldots, d_n)$ une suite décroissante (au sens large) d'entiers naturels. On souhaite montrer l'équivalence suivante : A est graphique si et seulement si la suite $A' = (t_1 - 1, \ldots, t_s - 1, d_1, \ldots, d_n)$ l'est.
   (a) Montrer que A' graphique implique A graphique.
   (b) On suppose que A est graphique, et l'on considère un graphe G dont la suite des degrés est A. On note $(S, T_1, \ldots, T_s, D_1, \ldots, D_n)$ la suite des sommets de G, dans l'ordre correspondant à A (autrement dit, avec $\deg S = s$, $\deg T_1 = t_1 \ldots$). On note $k(G)$ le nombre de voisins de S qui ne sont pas dans l'ensemble $\{T_1, \ldots, T_s\}$.
      i. Montrer que si $k(G) = 0$, alors A' est graphique.
      ii. On suppose $k(G) \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un graphe H ayant A comme suite de degrés et vérifiant $k(H) < k(G)$.
      iii. Conclure.
   (c) En déduire un algorithme permettant de décider si une suite finie d'entiers est graphique.

(d) Écrire une fonction `est_graphique` implémentant cet algorithme.

```
est_graphique : int list -> bool
```

(e) Quelle est la complexité de `est_graphique` en fonction de la longueur n de la suite ? Expliquer comment obtenir une complexité en $O(n^2)$. *On ne demande pas de le faire.*

Exercice 5 : Théorème de Turán

Les graphes de cet exercice ne sont pas orientés.

— Une *r-clique* d'un graphe $G = (V, E)$ est une clique de G de cardinal r (un ensemble de r sommets de G deux à deux adjacents). Autrement dit, une r-clique de G est un sous-graphe de G isomorphe à K_r.
— G est dit *sans* K_r s'il ne possède pas de r-clique.
— Un ensemble $H \subset V$ est dit *indépendant* s'il ne contient pas deux sommets adjacents dans G.
— G est dit *k-parti* si l'on peut partitionner V en $V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ où chacun des V_i est indépendant.
— Un graphe k-parti, avec $V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_k$ est dit *complet* si tous les éléments de V_i sont adjacents à tous les éléments de V_j pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant k$.
— Un graphe est dit *maximalement sans* K_r s'il est sans K_r et s'il est impossible de lui rajouter une arête sans créer de r-clique.
— Un graphe à n sommets est dit *optimalement sans* K_r [1] s'il est sans K_r et si son nombre d'arêtes est maximal parmi tous les graphes sans K_r à n sommets.

On s'intéresse ici au nombre maximal d'arêtes que peut posséder un graphe sans K_r ayant n sommets.

1. Donner un exemple de graphe maximalement sans K_3 qui ne soit pas optimalement sans K_3.
2. Montrer qu'un graphe r-parti est nécessairement sans K_{r+1}.
3. On définit le *graphe de Turán* $T_{n,r}$ comme le graphe r-parti complet à n sommets obtenu en partitionnant les n sommets en r ensembles « aussi égaux que possibles ».

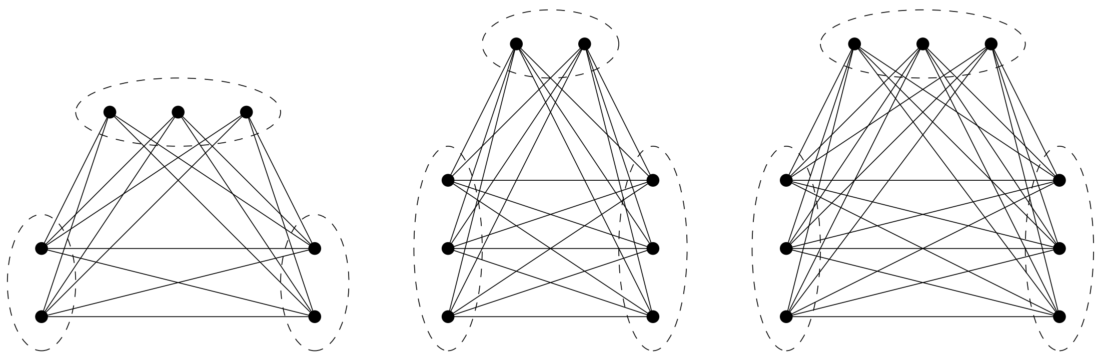

Figure 3 – Les graphe $T_{7,3}$, $T_{8,3}$ et $T_{9,3}$.

(a) On considère un graphe r-parti $G = (V, E)$, avec $V = V_1 \sqcup \cdots \sqcup V_r$ et $|V_i| - |V_j| \geqslant 2$ (pour un certain couple i, j). Montrer que G n'est pas optimalement sans K_{r+1}.
Indication : on pourra « déplacer » un sommet de V_i.

(b) On note $e_{n,r}$ le nombre d'arêtes du graphe $T_{n,r}$. On pose aussi $n = pr + s$ avec $0 \leqslant s < r$.

i. Justifier que $e_{n,r} = \binom{n}{2} - s\binom{p+1}{2} - (r-s)\binom{p}{2}$.

ii. Montrer alors que :

$$e_{n,r} = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{n^2}{2}.$$

Le calcul est assez pénible et peut être sauté.

4. On considère un graphe G à n sommets sans K_{r+1}, et l'on suppose que u, v et w sont trois sommets de G tels que $uv \notin E$, $vw \notin E$ et $uw \in E$.

(a) On suppose que $\deg v < \deg u$, et l'on considère le graphe $G' = (V', E')$ obtenu à partir de G en :
— supprimant v (et toutes les arêtes qui lui étaient incidentes) ;
— créant un nouveau sommet u' « copie » du u, qui a exactement les mêmes voisins que u (mais $uu' \notin E'$).
Montrer que G' est sans K_{r+1} et qu'il possède strictement plus d'arêtes que G.

(b) Montrer de même que si $\deg v \geqslant \max(\deg u, \deg w)$, on peut trouver un graphe G' sans K_{r+1} ayant strictement plus d'arêtes que G.

1. Vocabulaire non standard.

5. En déduire que si G est optimalement sans K_{r+1}, alors la relation $\sim$ défini sur V par $x \sim y$ ssi $xy \notin E$ est une relation d'équivalence.
6. En déduire le *théorème de Turán* : les graphes optimalement sans K_{r+1} sont exactement les graphes de Turán $T_{n,r}$.

Exercice 6 : Formule de Cayley

On souhaite déterminer le nombre T_n d'arbres distincts que l'on peut former à partir de n sommets étiquetés $1, \ldots, n$. Deux arbres sont distincts si et seulement si ils n'ont pas les mêmes arêtes :

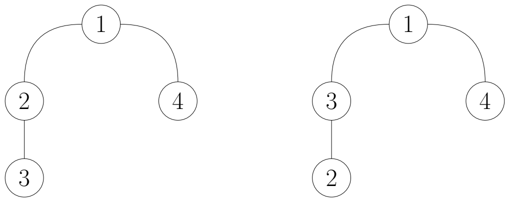

FIGURE 4 – Deux arbres distincts : $E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\}\}$ et $E = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\}\}$.

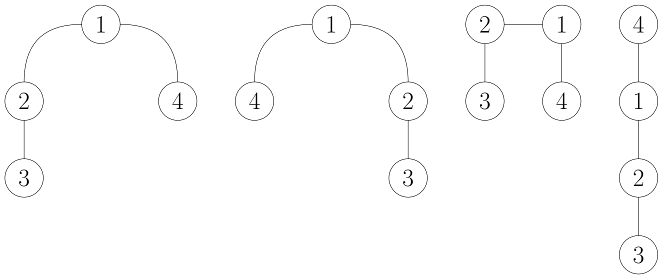

FIGURE 5 – Quatre représentations du même arbre ($E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{2,3\}\}$).

On s'intéresse aux séquences ordonnées $e_1, \ldots, e_{n-1}$ d'arcs orientés telles que le graphe orienté (V, E) avec $V = \{1, \ldots, n\}$ et $E = \{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ soit un arbre enraciné. On note S_n le nombre de telles séquences.

1. Montrer que $S_n = n! \cdot T_n$.
2. Déterminer S_n.
3. Conclure.

Exercice 7 : Caractérisation des graphes bipartis

Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si il ne possède pas de cycle de longueur impaire.
Une possibilité est d'utiliser le résultat de l'exercice des arbres couvrant.

Exercice 8 : Nilpotente

Une application de $X_n := [\![0, n-1]\!]$ dans lui-même est dite *nilpotente* s'il existe $r \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall x \in X_n, \quad f^r(x) = 0.$$

Dénombrer ces applications.

Exercice 9 : Chemins

On se restreint aux graphes non orientés dans cet exercice.

1. Montrer que si c est un chemin d'extrémités x et y dans G et si $z \in c$, alors il existe un chemin d'extrémités x et z dans G et un chemin d'extrémités y et z dans G.
2. Montrer que si c est un cycle de G et que si $x, y \in c$ sont deux sommets distincts de c, alors il existe deux chemins distincts reliant x et y.
3. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que s'il existe deux chemins distincts reliant deux sommets d'un graphe, alors ce graphe admet un cycle.
5. Adapter chacun des énoncés précédents aux graphes orientés.

Exercice 10 : Sudoku

Représenter la recherche de solution d'un Sudoku (initialement vide) comme la recherche d'une k-coloration d'un graphe non orienté. On précisera le graphe, son nombre de sommets et son nombre d'arêtes, et la quantité k à utiliser.

Exercice 11 : Tournoi

1. Montrer qu'un graphe non orienté possède un nombre pair de sommets de degré impairs.
2. En déduire que dans un tournoi entre 5 équipes de football, il est impossible que chaque équipe joue contre exactement trois adversaires pendant le tournoi.