Fractions rationnelles

1 Fraction rationnelle

Représentants d'une fraction rationnelle

Degré

Exercice 1 : Primitive

Montrer que la fraction rationnelle $F \coloneqq 1/X$ n'a pas de primitive dans $\mathbb{C}(X)$.

Racines, pôles et substitution

Exercice 2 : Valeurs prises par une fraction rationnelle

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle. On note $\mathcal{D}_F \coloneqq \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sont les pôles de F, et on définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_F & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & F(z). \end{array}$$

On suppose que F n'est pas constante. Montrer que $f(\mathcal{D}_F) = \mathbb{C}$ ou qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $f(\mathcal{D}_F) = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$.

Conjugaison sur $\mathbb{C}(X)$

2 Décomposition en éléments simples

Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}(X)$

Cas où le dénominateur est scindé

Exercice 3 : Décomposition en éléments simples

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ les fractions suivantes

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}, \qquad \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}.$$

Exercice 4 : Une somme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 5 : Une somme de série

Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{3k^2 - 1}{(k-1)^2 k^2 (k+1)^2}.$$

Exercice 6 : Décomposition en éléments simples

On considère la fraction

$$F \coloneqq \frac{1}{(X^3 - 1)^3}$$

que l'on souhaite décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$.

1. Calculer la partie polaire de F relative au pôle 1.
2. En étudiant les symétries de F, en déduire sa décomposition en éléments simples.

Exercice 7 : Autour de Chebyshev

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Décomposer $1/P_n$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 8 : Racines multiples de P'

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.

1. On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.
   (a) Calculer la décomposition en éléments simples de P'/P.
   (b) En déduire que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x)^2 \geqslant P(x)P''(x)$$
   avec égalité si et seulement si x est racine multiple de P.
   (c) Montrer que P' est scindé, puis montrer que toute racine multiple de P' est racine de P.
2. (a) Est-il vrai en général que toute racine multiple de P' est racine de P ?
   (b) Est-il vrai, sous l'hypothèse que P est scindé sur $\mathbb{R}$, que toute racine de P' est racine de P ?
3. On suppose que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'(x)^2 \geqslant P(x)P''(x).$$
   Montrer que P possède une racine réelle.

Exercice 9 : Théorème de Gauss-Lucas

1. Soit $P \in \mathbb{C}(X)$ non nul. Calculer la décomposition en éléments simples de $F \coloneqq P'/P$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la valeur de
   $$\sum_{z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-z}.$$
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant dont les racines sont $z_1, \ldots, z_r \in \mathbb{C}$.
   (a) Montrer que pour toute racine $\alpha \in \mathbb{C}$ de P', il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geqslant 0$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = 1$ et
   $$\alpha = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r.$$
   (b) Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 10 : Calcul de dérivées n-ièmes

Calculer la dérivée n-ième de
$$x \mapsto \ln(x^2 - x + 2).$$

Exercice 11 : Majoration d'une dérivée n-ième

Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|\operatorname{Arctan}^{(n)} x\right| \leqslant (n-1)!.$$

Exercice 12 : Dérivée n-ième

On pose
$$R \coloneqq \frac{1}{X^2+1}.$$

1. Décomposer R en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$, puis calculer $R^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$R^{(n)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(X^2+1)^{n+1}} \prod_{k=1}^{n} \left(X - \operatorname{cotan} \frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le dénominateur n'est pas scindé

Exercice 13 : Décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fractions suivantes

$$\frac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)}, \qquad \frac{X^4+1}{X^4+X^2+1}, \qquad \frac{X^3-1}{(X-1)(X-2)(X-3)},$$

$$\frac{X^2}{(X^2+X+1)^2}, \qquad \frac{(X^2+4)^2}{(X^2+1)(X^2-2)^2}.$$

3 Primitive d'expression rationnelle

Fractions rationnelles

Exercice 14 : Primitives de fractions rationnelles

Calculer, sur un domaine $\mathcal{D}$ que l'on précisera, les primitives des fonctions dont les expressions sont

$$\frac{1}{x^4-1}, \qquad \frac{x^2}{x^3-1}, \qquad \frac{x}{x^4+1}.$$

Fractions rationnelles en e^x

Fractions rationnelles en $\cos x$*,* $\sin x$

Exercice 15 : Primitives de fractions rationnelles en $\cos, \sin$

Calculer sur un domaine $\mathcal{D}$ que l'on précisera les primitives des fonctions dont les expressions sont

$$\frac{1}{\cos x \sin^3 x}, \qquad \frac{1}{\sin x + \cos x}.$$

Fractions rationnelles en $\mathrm{ch}\, x$*,* $\mathrm{sh}\, x$

Fractions rationnelles en x et $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$, en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Exercice 16 : Calcul de primitives

Calculer sur un domaine $\mathcal{D}$ que l'on précisera, les primitives des fonctions dont les expressions sont

$$\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \qquad \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}.$$

Exercice 17 : Une intégrale impropre

Calculer la limite lorsque x tend vers $\pi/2$ par la gauche de

$$\int_0^x \sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t.$$