Fonctions usuelles

1 Logarithme, exponentielle, puissance

Logarithme népérien

Exercice 1 : Équations, inéquations, inégalités

Montrer que pour tout $x \in \left]-1,1\right[\setminus \{0\}$, on a

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \leqslant -\frac{\ln(1-|x|)}{|x|}.$$

Exercice 2 : Études de variations

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0, \quad f(x) := \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

Étudier la monotonie de f.

2. (a) Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

(b) En déduire la limite de la suite de terme général

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exponentielle

Logarithme et exponentielle en base a

Exercice 3 : Équations, inéquations, inégalités

1. Résoudre, avec $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\log_a x > \log_{a^3}(3x-2).$$

2. Résoudre

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{50}{7} \\ xy = 256. \end{cases}$$

Fonction puissance

Calcul de limite

Exercice 4 : Calcul de limite en $\pm\infty$

Déterminer les limites, si elles existent, en $+\infty$ des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \qquad \textbf{b. } \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x}, \qquad \textbf{c. } \frac{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x},$$

$$\textbf{d. } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}, \qquad \textbf{e. } \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}, \qquad \textbf{f. } \frac{e^{2x} \ln^3 x}{x^4},$$

$$\textbf{g. } \frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} \text{ où } 1 < a < b, \qquad \textbf{h. } \frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}} \text{ où } a > 1.$$

Déterminer la limite, si elle existe, en $-\infty$ de

$$\textbf{i. } x^2 e^x \ln^3(-x).$$

Exercice 5 : Calcul de limite en 0

Déterminer les limites, si elles existent, en 0 des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, \qquad \textbf{b. } x^x, \qquad \textbf{c. } |\ln x|^x,$$

$$\textbf{d. } x^2\ln^3(x^3), \qquad \textbf{e. } \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}.$$

2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques

Fonctions trigonométriques directes

Exercice 6 : Calcul de limite en 0

Déterminer les limites, si elles existent, en 0 des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \frac{\ln(1+\sin x)}{x}, \qquad \textbf{b. } (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}, \qquad \textbf{c. } \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}.$$

Fonction Arcsin

Exercice 7 : Identité

Soit f la fonction définie par

$$f(x) \coloneqq -\frac{x}{2} + \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}.$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer $f(x+2\pi)$ à l'aide de $f(x)$. Quelle conséquence peut-on en déduire sur le graphe de f ?
3. (a) Calculer la dérivée de f à l'aide des théorèmes usuels.
   (b) Montrer que f' est constante par morceaux, puis simplifier $f(x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
4. Retrouver ce résultat directement, sans dériver.
5. Tracer le graphe de f.

Fonction Arccos

Exercice 8 : Étude de fonction

On considère la fonction f définie par

$$f(x) \coloneqq \operatorname{Arccos}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} - \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

1. Déterminer le domaine de définition et de continuité de f.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I suffit-il de faire l'étude de f ?
3. Étudier la dérivabilité de f sur I et calculer f'.
4. Tracer le graphe de f sur $[-\pi, \pi]$.

Fonction Arctan

Exercice 9 : Simplification

Simplifier les expressions suivantes

$$\textbf{a. } \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \textbf{b. } \operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

$$\textbf{c. } \operatorname{Arccos}(\cos 4\pi), \qquad \textbf{d. } \operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\textbf{e. } \tan(\operatorname{Arcsin} x), \qquad \textbf{f. } \sin(\operatorname{Arccos} x), \qquad \textbf{g. } \cos(\operatorname{Arctan} x).$$

Exercice 10 : Étude de fonction

Étudier la fonction définie par

$$f(x) \coloneqq x^2 \operatorname{Arctan}\frac{1}{1+x^2}.$$

Formules de trigonométrie réciproque

Exercice 11 : Identités

A-t-on égalité entre les expressions suivantes ?

$$\textbf{a.}\ \operatorname{Arcsin}\sqrt{x} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1),$$
$$\textbf{b.}\ \operatorname{Arctan}\frac{x+y}{1-xy} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}y,$$
$$\textbf{c.}\ \operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2},$$
$$\textbf{d.}\ 2\operatorname{Arcsin}x \quad \text{et} \quad \operatorname{Arcsin}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$

Exercice 12 : Équations

Résoudre les équations suivantes

$$\textbf{a.}\ \operatorname{Arctan}x=\operatorname{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2}, \qquad \textbf{b.}\ \operatorname{Arctan}x+\operatorname{Arctan}(2x)=\frac{\pi}{4},$$
$$\textbf{c.}\ \operatorname{Arcsin}(2x)=\operatorname{Arcsin}x+\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{2}x\right).$$

3 Fonctions trigonométriques hyperboliques

Exercice 13 : Simplification

Simplifier les expressions suivantes

$$\textbf{a.}\ \frac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}, \qquad \textbf{b.}\ \operatorname{sh}^2 x\cos^2 y+\operatorname{ch}^2 x\sin^2 y,$$
$$\textbf{c.}\ \ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{th}x}{1-\operatorname{th}x}}.$$

Exercice 14 : Identité

Montrer que

$$\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)-\operatorname{Arctan}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$$

est une constante à déterminer.

Exercice 15 : Calcul de somme

Soit a et b deux réels. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(a+kb).$$

Exercice 16 : Produit

1. Déterminer la limite, lorsque x tend vers 0, de
$$\frac{\operatorname{th}x}{x}.$$
2. Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \operatorname{th}(2x)=\frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2 x}.$$
3. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2^k}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{x}{\operatorname{th}x}.$$

Exercice 17 : Équation hyperbolique

1. Calculer
$$\operatorname{sh}\left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}\left(\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$
2. En déduire les solutions de l'équation $\operatorname{ch}x-\sqrt{5}\operatorname{sh}x=2\operatorname{sh}(3x)$.