Famille sommable

1 Famille sommable

Famille sommable de réels positifs

Exercice 1 : Exercice

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{k^\alpha}, \qquad \sum_{m\in\mathbb{N}^*}\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(m+n)^\alpha}.$$

Famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$

Exercice 2 : Exercice

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$L_k := \prod_{i=0}^{k-1}(X-i).$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, la famille
$$\left(\frac{P(n)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
est sommable.
2. Calculer
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{L_k(n)}{n!}$$
pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{n^4}{n!}.$$

Exercice 3 : Exercice

1. Prouver la sommabilité et calculer
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{k!}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k\geqslant n}\frac{(-1)^k}{k^3}, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}^*}(-1)^n\sum_{k\geqslant n}\frac{1}{k^3}.$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Prouver la sommabilité et calculer
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}.$$

Exercice 4 : Exercice

À quelles conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, z \in \mathbb{C}$ les familles suivantes sont-elles sommables ?

$$\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{a^pb^q}{p!q!}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\frac{q^pz^p}{p!q!}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}, \qquad \left(\binom{p+q}{p}z^{p+q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 5 : Exercice

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle
$$F_n := \frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}.$$
2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \mathrm{e}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$