Espaces euclidiens

1 Produit scalaire

Produit scalaire

Exercice 1 : Produit scalaire

On pose

$$E \coloneqq \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0 \quad \text{et} \quad P(1) = 0\}.$$

On définit l'application $\langle .|. \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P|Q \rangle \coloneqq -\int_0^1 P''(x) Q(x) \, \mathrm{d}x.$$

Montrer que $\langle .|. \rangle$ définit un produit scalaire.

Norme

Exercice 2 : Intégrales

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\left| \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\int_0^1 \frac{f^2(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \left| \int_0^1 \frac{\sqrt{t} f(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{2} \left(\int_0^1 \frac{f^2(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Déterminer dans chacun des deux cas à quelle condition sur f l'inégalité est une égalité.

Exercice 3 : Exercice

Soit (u_n) une suite positive telle que $\sum u_n$ converge. Montrer que

$$\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$$

converge.

Exercice 4 : Mines

On définit, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\langle A|B \rangle \coloneqq \operatorname{tr}\left(A^\top B\right).$$

1. Montrer que $\langle .|. \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \, \|B\|.$$

Notion d'orthogonalité

Exercice 5 : Vecteurs orthogonaux

Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|.$$

Exercice 6 : Une base orthonormale

Soit E un espace euclidien, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires tels que

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i|x \rangle^2.$$

Notons qu'on ne suppose pas que E est de dimension n.

1. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale.
2. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale.

2 Espace euclidien

Supplémentaire orthogonal

Exercice 7 : Orthogonal et somme

Soit E un espace euclidien et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que l'orthogonal de $F + G$ et l'intersection des orthogonaux de F et G sont égaux.
2. Montrer que l'orthogonal de l'intersection de F et G et la somme des orthogonaux de F et de G sont égaux.

Base orthonormée

Projecteur orthogonal

Exercice 8 : Projecteur orthogonal

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est orthogonal si et seulement si

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Exercice 9 : Calcul d'une projection orthogonale

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace euclidien usuel $\mathbb{R}^n$.

1. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par le système d'équations
$$\begin{cases} x_1 \ \ + x_2 \ \ + x_3 \ \ + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$
Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur à F.

Exercice 10 : Rang d'un projecteur orthogonal

Soit p un projecteur orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x)|x\rangle$.
2. Montrer que pour toute base orthonormée $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ de E
$$\sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2 = \mathrm{rg}(p).$$

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Exercice 11 : Orthonormalisation

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Montrer que les vecteurs

$$e_1 := (1, 0, 1), \quad e_2 := (1, 0, 2) \quad \text{et} \quad e_3 := (1, 1, 1)$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 12 : Une distance

Calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \left[x^2 - (ax + b)\right]^2 \mathrm{d}x.$$

Exercice 13 : Sur les polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On pose $E := \mathbb{R}_n[X]$ et on définit l'application $\langle . | . \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall P, Q \in E, \quad \langle P|Q\rangle := \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k).$$

1. Montrer que $\langle . | . \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On suppose dans cette question que $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et $a_2 = 3$. Déterminer une base orthonormée de E.

Exercice 14 : Racines des polynômes orthogonaux

Soit $E \coloneqq \mathbb{R}_n[X]$, muni de la forme

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P|Q\rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle .|. \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que E admet une base orthonormée $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg P_k = k.$$

3. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P_k admet exactement k racines sur $]-1, 1[$.

Dual