Variables aléatoires

1 Espérance, variance

Espérance

Exercice 1 : Espérance d'une différence

Soit $n \geqslant 1$. Soit X et Y deux variables aléatoires de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et indépendantes. Déterminer la loi et l'espérance de $Z \coloneqq X - Y$.

Exercice 2 : Nombre de points fixes d'une permutation

L'ensemble S_n des permutations de $[\![1, n]\!]$ est muni de la probabilité uniforme. On effectue un tirage aléatoire d'une permutation. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si k est fixe par la permutation et 0 sinon. On note X la variable aléatoire égale au nombre de points fixes de la permutation. Exprimer X en fonction des X_k et en déduire l'espérance de X.

Exercice 3 : Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne. On note X le numéro de la boule tirée. Déterminer la loi de X puis son espérance.

Exercice 4 : Les vaches

On considère une population de 2^n vaches susceptibles, avec la probabilité p, d'être porteuses d'un virus donné. On dispose d'un test détectant de façon certaine ce virus dans le lait des vaches. On fixe $0 \leqslant k \leqslant n$. On sépare les vaches en 2^{n-k} groupes de 2^k vaches. On mélange leur lait, on fait un test sur chacun des mélanges, puis on effectue un test sur chacune des vaches des groupes contaminés. On note Y le nombre de groupes malades et X le nombre total de tests effectués.

1. Exprimer X en fonction de Y, k et n.
2. Déterminer la probabilité qu'un groupe donné soit malade.
3. Donner la loi de Y et son espérance.
4. En déduire l'espérance de X.
5. On suppose $n = 10$ et $p = 0.01$. Déterminer la meilleure valeur de k.

Exercice 5 : La puce

Une puce se déplace (uniquement en avant) sur une bande numérotée par les entiers naturels et commence à la case 0. À chaque étape, elle fait un bond d'une case avec la probabilité p et de deux cases avec la probabilité $q = 1 - p$. On note X_n le numéro de la case où se trouve la puce après n bonds et Y_n le nombre de bonds d'une case effectués après n bonds.

1. Déterminer la loi de Y_n.
2. Exprimer X_n en fonction de Y_n.
3. En déduire l'espérance de X_n.

Exercice 6 : Exercice

Soit $X_1, ..., X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose

$$T \coloneqq \min\{j \in [\![2, n+1]\!] \mid X_j \in \{X_1, ..., X_{j-1}\}\}.$$

1. Vérifier que T est bien défini.
2. (a) Écrire une fonction Python qui prend $(X_1, ..., X_{n+1})$ en arguments et qui renvoie T.
   (b) On choisit $n = 1000$. Écrire une fonction qui prend N en argument et qui renvoie la moyenne de T au bout de N essais.
3. (a) Quelles sont les valeurs que peut prendre T ? Déterminer la loi de T.

(b) Montrer que $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T > k)$ et en déduire que

$$\mathbb{E}(T) = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

(c) En admettant que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\mathrm{e}^n$$

donner un équivalent de $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 7 : Exercice

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire aléatoirement k boules en une seule prise. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de la plus petite boule tirée. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 8 : Exercice

Un questionnaire comporte 20 questions. Pour chaque question, k réponses sont possibles dont une seule est bonne. Chaque bonne réponse rapporte 1 point. Un candidat répond au hasard à toutes les questions.

1. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de points obtenus par le candidat à ce questionnaire. Déterminer la loi de X.
2. À chaque question, si le candidat s'est trompé, il a droit à une seconde chance et peut choisir une autre réponse parmi celles qui restent. Il gagne alors 1/2 point en cas de bonne réponse. Soit Y le nombre de 1/2 points obtenus, déterminer la loi de Y.
3. Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.

Exercice 9 : Exercice

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, m]\!]$ et $(X_1, \ldots, X_m)$ des variables aléatoires à valeurs entières indépendantes entre elles et de N et suivant toutes la même loi. On pose pour tout $j \in [\![1, m]\!]$

$$S_j \coloneqq \sum_{i=1}^{j} X_i.$$

On pose enfin

$$Z \coloneqq \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

1. Déterminer l'espérance de Z.
2. On tire un entier N au hasard et uniformément dans $[\![1, n]\!]$ puis on jette N fois une pièce équilibrée. Calculer l'espérance du nombre de piles obtenus.

Variance

Exercice 10 : Exercice

On considère 5 jetons numérotés de 1 à 5.

1. On tire simultanément 2 jetons parmi les 5 et on note X la plus petite valeur. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. On tire successivement et avec remise 2 jetons parmi les 5 et on note Y la plus petite valeur. Déterminer la loi de Y et son espérance.

2 Couple de variables aléatoires

Loi conjointe

Exercice 11 : Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace probabilisé fini. On suppose que X et Y sont symétriques, c'est-à-dire que X et $-X$ (respectivement Y et $-Y$) ont même loi.

1. Montrer que (X, Y) et $(X, -Y)$ ont même loi, puis que

$$\mathbb{P}(X^2 = Y^2) = 2\mathbb{P}(X = Y) - \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0).$$

2. Montrer que $\mathbb{P}(X + Y \geqslant 0) = \mathbb{P}(X + Y \leqslant 0)$.

Covariance

Exercice 12 : Exercice

On lance deux fois un dé équilibré à 6 faces et on note D_1 et D_2 les deux résultats. On pose $S \coloneqq D_1 + D_2$ puis X_1 (resp. X_2) le reste de la division euclidienne de S par 2 (resp. 5).

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) (est-elle uniforme ?) et ses lois marginales.
2. Calculer $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3 Vers les grands nombres

Exercice 13 : Marche aléatoire

Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi : $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$. On pose $S_n \coloneqq X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Majorer
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right).$$
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right) = \operatorname{ch}^n t$.
3. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\operatorname{ch}(t) \leqslant \mathrm{e}^{t^2/2}$.
4. Montrer que, pour tout $t > 0$
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right).$$
5. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$