Espaces vectoriels

1 Espace vectoriel, application linéaire

Définition, propriétés élémentaires

Sous-espace vectoriel

Exercice 1 : Exemples d'espaces vectoriels

1. Les ensembles E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel des suites réelles ? Si oui, le prouver.
   (a) L'ensemble des suites réelles ayant une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) L'ensemble des suites réelles bornées, c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles (u_n) telles qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M.$$
2. Les ensembles E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$? Si oui, le prouver.
   (a) L'ensemble des fonctions 1-périodiques.
   (b) L'ensemble des fonctions croissantes.
   (c) L'ensemble des fonctions qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
   (d) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + \mathrm{e}^{t\sin(t)} y(t) = 0.$$

Exercice 2 : Combinaison linéaire

1. Dans $\mathbb{R}^3$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que le vecteur $e_1 \coloneqq (1, -a, 1)$ soit combinaison linéaire de $e_2 \coloneqq (1,1,1)$ et $e_3 \coloneqq (a, 0, 2)$.
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : x \mapsto \cos^2(x)$ est-elle combinaison linéaire de $g_0 : x \mapsto 1$ et $g_2 : x \mapsto \cos(2x)$?
3. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f : x \mapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de $g : x \mapsto \cos(x)$ et $h : x \mapsto \sin(x)$?

Exercice 3 : Fonctions trigonométriques

On pose $E \coloneqq \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions f_n et g_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) \coloneqq \cos(nx) \qquad \text{et} \qquad g_n(x) \coloneqq \cos^n(x).$$

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2) = \mathrm{Vect}(g_0, g_1, g_2)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in \mathrm{Vect}\,(f_0, \dots, f_n)$ et $f_n \in \mathrm{Vect}\,(g_0, \dots, g_n)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, \dots, f_n) = \mathrm{Vect}\,(g_0, g_1, \dots, g_n)$.

Exercice 4 : Espace vectoriel engendré

Soit u, v et w trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, w)$ si et seulement si

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}, \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0.$$

Exercice 5 : Union de sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
2. Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E pour laquelle
   $$\forall i, j \in I, \quad \exists k \in I, \quad F_i \cup F_j \subset F_k.$$
   Montrer que $\cup_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Application linéaire

Exercice 6 : Caractérisation des homothéties

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le but de cet exercice est de montrer que f est une homothétie si et seulement si, quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.

1. Montrer que si f est une homothétie, quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.
2. Réciproquement, on suppose que quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
   (b) Montrer que si x et $y \in E \setminus \{0\}$ sont colinéaires, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (c) Montrer que si x et $y \in E \setminus \{0\}$ ne sont pas colinéaires, alors $\lambda_x = \lambda_y$.
   (d) Conclure.

Exercice 7 : Automorphisme

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E \times F & \longrightarrow & E \times F \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, y - u(x)) \end{array}$$

est un automorphisme de $E \times F$.

2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

$\mathcal{L}(E, F)$

Exercice 8 : Calcul dans $\mathcal{L}(E)$

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f + \mathrm{Id}$. Montrer que f est un automorphisme.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que
$$f^n = 0.$$
Montrer que $\mathrm{Id}_E + f$ est un automorphisme et calculer son inverse.

Le groupe linéaire

Exercice 9 : Automorphisme de $\mathbb{R}^3$

Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y, z) & \longmapsto & (x + z, -2x + y, x + 3z) \end{array}$$

Montrer que $f \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan

Somme, somme directe

Exercice 10 : Exercice

Soit v et w deux vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w$ si et seulement si

$$\exists u \in F, \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad u = \alpha v + \beta w \quad \text{et} \quad \alpha\beta \neq 0.$$

Exercice 11 : Exercice

Soit E un espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. Vérifiez sur un dessin qu'il est possible que cette inclusion soit stricte.
2. Établir que l'on a $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap [G + (F \cap H)]$.

Exercice 12 : Exercice

E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que

$$\mathrm{Im}\,(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f = F.$$

Exercice 13 : Pseudo inverse

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$.
2. Montrer que $u(\operatorname{Im} v) = \operatorname{Im} u$.

Exercice 14 : Rendre directe une somme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $F+G=E$. On note F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que

$$E = F' \oplus G.$$

Exercice 15 : Supplémentaire

On se place dans $E \coloneqq \mathbb{R}^3$. On se donne $a \in \mathbb{R}$ et on pose

$$e_1 \coloneqq (a, a, 1), \quad e_2 \coloneqq (1, a, 1), \quad e_3 \coloneqq (2, 1, 1).$$

On pose enfin $A \coloneqq \operatorname{Vect}(e_1)$ et $B \coloneqq \operatorname{Vect}(e_2, e_3)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $e_1 = \alpha e_2 + \beta e_3$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que quel que soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $(x, y, z) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que A et B soient supplémentaires.

Projecteur

Exercice 16 : Somme de deux projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q.$$

Exercice 17 : Réduction d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id} = 0.$$

1. Montrer que $(f - 2\,\mathrm{Id}) \circ (f - 3\,\mathrm{Id}) = 0$.
2. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$.

Exercice 18 : Projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et g un projecteur de E. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g).$$

2. Soit f un projecteur de E et $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g).$$

3. Soit f et g deux projecteurs de E. Montrer que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si

$$\operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g).$$

Symétrie

Exercice 19 : Centre de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le but de cet exercice est de montrer que les endomorphismes qui commutent avec tous les autres sont les homothéties.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie, alors elle commute avec tous les endomorphismes de E.
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme commutant avec tous les endomorphismes de E.
   (a) Soit s une symétrie de E. Montrer que $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id})$ sont stables par f.
   (b) En admettant le fait que toute droite vectorielle admet un supplémentaire, montrer que quel que soit $x \in E$, x et $f(x)$ sont colinéaires.
   (c) Conclure.

Hyperplan

Exercice 20 : Hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H_1, H_2 deux hyperplans de E tels que $H_1 \subset H_2$. Montrer que $H_1 = H_2$.