Équations différentielles

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Équation différentielle avec second membre

Exercice 1 : Calcul

Résoudre les équations différentielles suivantes sur un intervalle à préciser

$$\textbf{a.}\ y' + 2y = x^2 - 2x + 3, \qquad \textbf{b.}\ (1+x)\,y' + y = 1 + \ln(1+x),$$

$$\textbf{c.}\ y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

Exercice 2 : Avec un second membre

Déterminer les fonctions dérivables $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + y(x) = \int_0^1 y(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 3 : Équations fonctionnelles

1. Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = \mathrm{e}^x f(y) + f(x)\mathrm{e}^y.$$

2. Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) \neq 0$ et

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f'(y) + f'(x)f(y).$$

Problème de Cauchy

Équation différentielle non résolue

Exercice 4 : Une équation différentielle avec peu de solutions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad |t|\,y'(t) + (t-1)\,y(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation pour $I = \mathbb{R}_+^*$ puis $I = \mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire les solutions de cette équation différentielle lorsque $I = \mathbb{R}$.
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ a-t-il toujours au moins une solution ? Si oui, est-elle unique ?

Exercice 5 : Une équation différentielle avec beaucoup de solutions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad ty'(t) - (t+2)\,y(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation pour $I = \mathbb{R}_+^*$ puis $I = \mathbb{R}_-^*$.
2. En déduire les solutions de cette équation différentielle lorsque $I = \mathbb{R}$.
3. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème de Cauchy $y(t_0) = y_0$ a-t-il toujours au moins une solution ? Si oui, est-elle unique ?

Exercice 6 : Discontinuité des coefficients de l'équation

Soit H la fonction de Heaviside définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + H(t)y(t) = 0.$$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Les problèmes de Cauchy associés à cette équation ont-ils toujours une unique solution ?

2 Équation différentielle linéaire du second ordre

Équation différentielle homogène

Exercice 7 : Équation d'Euler

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad t^2y'' - ty' + y = 0.$$

1. Dans cette question, on souhaite résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (a) On se donne une fonction $y : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivable deux fois et on définit la fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
   $$\forall u \in \mathbb{R}, \quad z(u) := y(\mathrm{e}^u).$$
   Montrer que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Enfin, déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, on appelle équation d'Euler toute équation différentielle de la forme

$$at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0.$$

Leur résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants après le même changement de variable que ci-dessus.

Exercice 8 : Changement de variable

1. En posant $x := \tan t$, résoudre l'équation différentielle
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)^2y''(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + 4y(x) = 0.$$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. En posant $x := \operatorname{sh} t$, résoudre l'équation différentielle
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \alpha^2y(x) = 0.$$

Exercice 9 : Équations fonctionnelles

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(\lambda - x).$$
2. Trouver toutes les fonctions f deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que
   $$\forall x > 0, \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$
   On utilisera les résultats sur l'équation d'Euler

Exercice 10 : Utilisation du plan de phase

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique dirigé suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{array}\right.$$

où ω dépend de la masse, de la charge de la particule et du champ magnétique. En considérant $u = x' + \mathrm{i}y'$, résoudre ce système différentiel.

Équation différentielle avec second membre

Exercice 11 : Calcul

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$

$$\textbf{a. } y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2, \qquad \textbf{b. } y'' + 3y' + 2y = \mathrm{e}^{-x},$$

$$\textbf{c. } y'' - 4y' + 4y = x\cosh(2x), \qquad \textbf{d. } y'' + y = \sin^3 x.$$

Exercice 12 : Recollement

Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-|x|}.$$

Problème de Cauchy

Exercice 13 : Calcul

Déterminer l'unique solution y sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = 3x^2$$

telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.