Espaces vectoriels de dimension finie

1 Famille libre, famille génératrice, base

Famille libre

Exercice 1 : Familles de fonctions

1. Soit $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions définies par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) := \sin x, \quad f_2(x) := \cos x, \quad f_3(x) := x \sin x, \quad f_4(x) := x \cos x.$$
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.
2. Soit $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ les fonctions définies par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) := \mathrm{e}^{x}, \quad f_2(x) := \mathrm{e}^{2x}, \quad f_3(x) := \mathrm{e}^{x^2}.$$
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

Exercice 2 : Familles de fonctions

Montrer que les familles de fonctions suivantes sont libres.

1. La famille de fonctions $(f_0, \dots, f_n)$ définies sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) := x^k.$$
2. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}_+$ sont deux à deux distincts et
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) := \cos(\alpha_k x).$$
3. La famille de fonctions $(f_0, \dots, f_n)$ définies par
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) := \sin^k x.$$
4. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont deux à deux distincts et
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha_k x}.$$
5. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont deux à deux distincts et
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) := |x - \alpha_k|.$$

Exercice 3 : Modification d'une famille libre

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de n vecteurs. On se donne n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et on pose
$$y := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $y_i := x_i + y$ et l'on souhaite montrer que $(y_1, \dots, y_n)$ est libre si et seulement si
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq -1.$$

1. Soit $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i + \lambda_i \sum_{k=1}^{n} \mu_k \right) x_i.$$
2. Dans le cas où $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = -1$, déterminer une relation de liaison pour la famille $(y_1, \dots, y_n)$.
3. Montrer que si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \neq -1$, alors $(y_1, \dots, y_n)$ est libre, puis conclure.

Famille Génératrice

Exercice 4 : Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_n \in E$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$v_k \coloneqq u_1 + \cdots + u_k.$$

1. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ l'est.
2. Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ engendre E si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre E.

Base

Exercice 5 : Changement de base

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les trois vecteurs $u \coloneqq (1, 1, -1)$, $v \coloneqq (-1, 1, 1)$ et $w \coloneqq (1, -1, 1)$.

1. Montrer que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner les coordonnées de $(2, 1, 3)$ dans cette base.

Cas des familles infinies

Exercice 6 : Famille des fonction polynôme-exponentielle

Pour tout entier naturel n et tout nombre complexe α, on définit la fonction $f_{n,\alpha}$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n,\alpha}(x) \coloneqq x^n \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la famille $(f_{n,\alpha})_{(n,\alpha)\in\mathbb{N}\times\mathbb{C}}$ est libre.

1. Montrer que la famille $(f_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$, résoudre l'équation différentielle : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) + \alpha y(x) = 0$.
3. Montrer par récurrence sur un majorant de $\deg P_1 + \cdots + \deg P_n$, que si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont n complexes deux à deux distincts et si
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_1(x)\mathrm{e}^{\alpha_1 x} + \cdots + P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha_n x} = 0$$
alors $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0$.
4. Conclure.

Exercice 7 : $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-ev

On considère $\mathbb{R}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathcal{P}}$ est libre.

2 Dimension

Espace vectoriel de dimension finie

Exercice 8 : Centre de $\mathcal{L}(E)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le but de cet exercice est de montrer que le centre de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes est l'ensemble des homothéties.

1. Montrer que les homothéties sont dans le centre de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit u un endomorphisme de E tel que
$$\forall x \in E, \quad \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x) = \lambda x.$$
Montrer que u est une homothétie.
3. Soit u un endomorphisme de E qui commute avec toutes les applications linéaires.
   (a) Soit $x \in E$. En considérant une symétrie par rapport à $\mathbb{K}x$, montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
   (b) Conclure.

Dimension d'un espace vectoriel

Existence et unicité en dimension finie

Exercice 9 : Base

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la famille
$$((2,0,\alpha),(2,\alpha,2),(\alpha,0,2))$$
soit une base de $\mathbb{R}^3$.
2. La famille
$$((1,0,2,1),(0,1,1,2),(2,0,1,1),(2,1,0,1))$$
est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 10 : Base de polynômes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ définie par
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P_k \coloneqq (1-X)^{n-k}X^k$$
est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 11 : Le Laplacien discret

Soit $n \geqslant 2$ et φ l'application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ définie par
$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \varphi(P) \coloneqq P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Calculer $\deg[\varphi(P)]$ en fonction de $\deg P$.
3. Quel est le noyau de φ ?
4. Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$.

Exercice 12 : Formes linéaires et trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. On définit l'application ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star$, qui à la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe l'application φ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ définie par
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi_A(X) \coloneqq \operatorname{tr}(AX).$$
Montrer que ψ est bien à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\star$ puis qu'elle est linéaire.
2. Montrer que ψ est un isomorphisme. En déduire que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(X) = \operatorname{tr}(AX).$$
3. Montrer que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors
$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(XY) = \varphi(YX)$$
si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(X) = \lambda \operatorname{tr}(X).$$

Dimension d'un sous-espace vectoriel

Notion de rang

Exercice 13 : Rang et composition

Montrer qu'on ne change pas le rang d'une application linéaire en la composant par la droite par une application surjective ou par la gauche par une application injective.

3 Calcul de dimension et de rang, hyperplan

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Exercice 14 : Dimension

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbb{R}^5$. Montrer que $A \cap B \neq \{0\}$.

Exercice 15 : Supplémentaire

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose

$$e_1 \coloneqq (\lambda, \lambda, 1), \qquad e_2 \coloneqq (1, \lambda, 1) \qquad \text{et} \qquad e_3 \coloneqq (2, 1, 1).$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que (e_1, e_2, e_3) soit libre.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $A \coloneqq \mathrm{Vect}(e_1)$ et $B \coloneqq \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16 : Supplémentaire

Soit $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts. On pose

$$F \coloneqq \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(x_k) = 0\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et en déterminer un supplémentaire. *On pourra utiliser les polynômes de Lagrange.*

Exercice 17 : Supplémentaire commun

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et A et B deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension r. Le but de cet exercice est de montrer que A et B ont un supplémentaire commun dans E.

1. Montrer le résultat lorsque $n = r + 1$.
2. Plus généralement, montrer que si le résultat est vrai si $\dim A = \dim B = r + 1$, alors il est vrai si $\dim A = \dim B = r$.
3. Conclure.

Produit de deux sous-espaces vectoriels, $\mathcal{L}(E, F)$

Théorème du rang

Exercice 18 : Noyau et image en somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer que

$$E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2.$$

Cette équivalence est-elle vraie en dimension infinie ?

Exercice 19 : Rang d'une somme d'applications linéaires

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux applications linéaires de E dans F.

1. Montrer que
$$|\mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\, g| \leqslant \mathrm{rg}(f + g) \leqslant \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g.$$
2. On suppose dans cette question que $E = F$. Montrer que si $f \circ g = 0$ et $f + g$ est inversible, alors $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = \dim E$.

Exercice 20 : Dimension du noyau et composition

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. En considérant la restriction de f à $\mathrm{Ker}\, g \circ f$, montrer que

$$\dim (\mathrm{Ker}\, g \circ f) \leqslant \dim (\mathrm{Ker}\, g) + \dim (\mathrm{Ker}\, f).$$

Exercice 21 : Endomorphisme f tel que $f^2 = 0$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\, f \leqslant 2$.

Exercice 22 : Factorisation

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = h \circ g$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$.

Exercice 23 : Noyaux et images itérés

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$K_n := \operatorname{Ker} f^n \quad \text{et} \quad I_n := \operatorname{Im} f^n.$$

1. (a) Montrer que la suite (K_n) est croissante au sens de l'inclusion et que la suite (I_n) est décroissante au sens de l'inclusion.
   (b) i. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n = K_{n+1}$. Dans la suite, on note n_0 le plus petit entier tel que $K_{n_0} = K_{n_0+1}$.
   ii. Montrer que
   $$\forall n \geqslant n_0, \quad K_n = K_{n_0}.$$
   (c) i. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = I_{n+1}$. Dans la suite, on note n_1 le plus petit entier tel que $I_{n_1} = I_{n_1+1}$.
   ii. Montrer que
   $$\forall n \geqslant n_1, \quad I_n = I_{n_1}.$$
   (d) Montrer que $n_0 = n_1$. Dans la suite, on note r cette valeur commune.
2. (a) Montrer que $I_r \oplus K_r = E$.
   (b) Montrer que I_r et K_r sont stables par f, puis que la restriction de f à K_r est nilpotente et que la restriction de f à I_r est un automorphisme.
3. (a) Montrer que la suite de terme général $\dim I_n - \dim I_{n+1}$ est décroissante. *On pourra pour cela considérer l'application φ de I_n dans I_{n+1} qui à x associe $f(x)$.*
   (b) Énoncer et démontrer un résultat semblable pour la suite (K_n).

Hyperplan

Exercice 24 : Intersection d'hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Exercice 25 : Bidual

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On note $E^{\star\star}$ le bidual de E, c'est-à-dire le dual du dual de E.

1. Montrer que E et $E^{\star\star}$ sont isomorphes.
2. Soit φ l'application de E dans $E^{\star\star}$ qui à x associe l'application φ_x de $E^\star$ dans $\mathbb{K}$ qui à ψ associe $\psi(x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in E$, φ_x est une forme linéaire sur $E^\star$.
   (b) Montrer que φ est un isomorphisme.

Exercice 26 : Hyperplan de $\mathbb{K}[X]$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que

$$H := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\}$$

est un hyperplan et en déterminer une base.