Fonctions de deux variables

1 Limite, continuité

Notion d'ouvert

Limite

Exercice 1 : Calcul de limites

Déterminer les limites, si elles existent, des fonctions suivantes en $(0,0)$.

$$f(x,y) \coloneqq (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad f(x,y) \coloneqq \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) \coloneqq \frac{|x+y|}{x^2+y^2},$$

$$f(x,y) \coloneqq \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad f(x,y) \coloneqq \frac{x^2+y^2-1}{x}\sin x, \qquad f(x,y) \coloneqq x^y.$$

Continuité

Exercice 2 : Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2 > 1, \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{si } x^2+y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : L'image d'un convexe

Soit f une fonction continue sur un convexe P de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $f(P)$ est un intervalle.

Application partielle

Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

2 Dérivation

Dérivée partielle

Exercice 4 : Dérivées partielles et continuité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f admet une dérivée selon tout vecteur en $(0,0)$ mais n'est pas continue en 0.

Exercice 5 : Régularité d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \coloneqq \begin{cases} \frac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. f admet-elle des dérivées partielles au point $(0,0)$?
2. f est-elle continue en $(0,0)$?
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Développement limité, gradient

Exercice 6 : Calcul

Soit $f : (x,y) \mapsto xy^2$.

1. Déterminer la dérivée de f au point $a \coloneqq (-1,3)$ selon le vecteur $h \coloneqq (2,-3)$.
2. Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 en a.

Dérivation des fonctions composées

Exercice 7 : Calcul de dérivées

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes

$$g_1\,(x,y) \coloneqq f(y,x), \qquad g_2(x) \coloneqq f(x,x),$$

$$g_3\,(x,y) \coloneqq f(y,f(x,x)), \qquad g_4(x) \coloneqq f(x,f(x,x)).$$

Exercice 8 : Équation aux dérivées partielles

On pose $\mathcal{U} \coloneqq \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = 0 \quad \text{et} \quad x \leqslant 0\right\}$. On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathcal{U} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$(E) \qquad \forall (x,y) \in \mathcal{U}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

1. On pose $\mathcal{V} \coloneqq \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi,\pi\right[$ et on définit

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$$

   Montrer que φ est une bijection.

2. Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (r,\theta) \in \mathcal{V}, \quad g(r,\theta) \coloneqq f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

   Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Extrémum d'une fonction de deux variables