Déterminants

1 Déterminant

Forme n-linéaire alternée

Exercice 1 : Exercice ENS

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $d \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E.

Déterminant d'une famille de n vecteurs

Exercice 2 : Exercice

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Montrer que pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$

$$\sum_{k=1}^{n} \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n) = \operatorname{tr}(f) \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 3 : Déterminant de la transposition

Soit φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même qui à la matrice M associe sa transposée. Calculer le déterminant de φ.

Déterminant d'une matrice carrée

2 Calcul de déterminant

Méthode du pivot

Exercice 4 : Calcul de déterminant

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par les coefficients

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} := \sin(a_i + a_j).$$

Exercice 5 : Calculs de déterminants

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$. Calculer et factoriser les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 6 : Calculs de déterminants

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Calculer et factoriser les déterminants suivants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & b & ac \\ 1 & b & c & bd \\ 1 & c & d & ac \\ 1 & d & a & bd \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$$

Exercice 7 : Calcul de déterminant

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos(a_1) & \cos(a_2) & \cdots & \cos(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cos((n-1)a_1) & \cos((n-1)a_2) & \cdots & \cos((n-1)a_n) \end{vmatrix}$$

Exercice 8 : Matrice circulante

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On pose

$$M \coloneqq \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad J \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que $\det J \neq 0$.
   (b) Calculer MJ et en déduire $\det M$.

2. Mêmes questions avec la *matrice circulante*

$$M \coloneqq \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J \coloneqq \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

   pour $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ en posant $\omega \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

Exercice 9 : Calculs de déterminants

Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ a_n & \cdots & \cdots & a_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 10 : Calcul de déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. On définit la matrice $A_{n,p}$ de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ par

$$A_{n,p} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \binom{n+p}{2} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}$$

Calculer $\det A_{n,p}$.

Développement par rapport à une colonne

Exercice 11 : Matrice tridiagonale

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & (0) \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ (0) & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 12 : Calcul de rang

Résoudre le système linéaire dont la matrice A est définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \qquad a_{i,j} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quel est son rang ?

Comatrice

Exercice 13 : Comatrice du produit

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que les matrices $A - XI_n$ et $B - XI_n$ sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}(X))$.
2. Montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B)$.