Dérivation

1 Fonction dérivable, dérivées successives

Définition

Exercice 1 : Dérivabilité

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Que vaut

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h}.$$

Exercice 2 : Dérivabilité

1. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2. Donner le domaine de dérivabilité de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) \coloneqq \frac{|x|}{1 + |x^2 - 1|}.$$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \coloneqq \begin{cases} ax^3 + bx + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Suite

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général

$$u_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Théorèmes usuels

Exercice 4 : Dérivabilité et symétries

1. Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.
2. Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable impaire ? périodique ?

Fonction dérivée, dérivées successives

Exercice 5 : Calcul de dérivées n-ièmes

Calculer les dérivées à l'ordre n des fonctions d'expressions

$$\sin^5(x), \qquad x^2 e^x, \qquad x^{n-1}\ln(x), \qquad x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}.$$

Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Exercice 6 : Dérivabilité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_α définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) \coloneqq \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Préciser les nombres α pour lesquels f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 : Dérivabilité

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad f_n(x) \coloneqq \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}.$$

1. Étudier le domaine de définition de f_n, sa parité, sa périodicité.
2. Montrer que f_n se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pourra pour cela établir une relation entre f_{n+1} et f_n.

Exercice 8 : Dérivabilité

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et $a \in [0,1]$.

1. Montrer que la fonction
$$\begin{array}{rccc} \tau_a : & [0,1] \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$
se prolonge par continuité en a.
2. Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

2 Théorème de Rolle et applications

Extrémum local

Exercice 9 : Théorème de Darboux

Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, alors que l'on sait bien qu'elle peut ne pas être continue. On se donne donc f une fonction dérivable sur un intervalle I, $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $y_0 \in$ « $[f'(a), f'(b)]$ ». On souhaite montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f'(x_0) = y_0$.

1. Résoudre le problème lorsque $y_0 = 0$.
2. En déduire le cas général.

Exercice 10 : Théorème de la corde

Soit f une fonction continue et dérivable sur $[0,1]$ telle que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad \text{et} \quad f'(1) = 0.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par
$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$.
2. En remarquant que $g'(1) < 0$, montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c) = 0$ puis conclure.

Théorème de Rolle, accroissements finis

Exercice 11 : Application directe du théorème de Rolle

1. Soit f une fonction dérivable n fois sur un intervalle I. On suppose que f admet $n+1$ zéros distincts dans I. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est 1-périodique et admet n zéros sur l'intervalle $[0,1[$. Montrer que f' admet n zéros sur ce même intervalle.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Majorer le nombre de zéros de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) \coloneqq P(x) - \ln x.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction P_n sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) \coloneqq \left(x^2 - 1\right)^n.$$
Montrer que $P_n^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]-1,1[$.

Exercice 12 : Application récursive du théorème de Rolle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad f(x) := x^n \cos x.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}(0) = 0$.
2. En déduire qu'il existe $c \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 13 : Accroissements finis généralisés

Soit f et g deux fonctions réelles, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Exercice 14 : Taylor

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Soit $x \in I$ distinct de a.

1. Montrer qu'il existe un unique réel A tel que la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(x) - \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + \frac{A}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}\right] \end{array}$$

   s'annule en a.

Dans la suite de l'exercice, A sera égal à cette valeur.

2. Montrer que φ est dérivable et simplifier $\varphi'(t)$.
3. En déduire qu'il existe $c \in I$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

   Pourquoi est-ce encore vrai si $x = a$?
4. En déduire que s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$

   alors

$$\forall a, x \in I, \quad \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}.$$

Dérivation et monotonie

Théorème de la limite de la dérivée

Exercice 15 : Une équation différentielle non linéaire

Rechercher les solutions réelles de l'équation différentielle $y' = |y|$.

Théorème de la limite de la dérivée

Exercice 16 : Limite de la dérivée

1. Quelle est la dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$?
2. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \ln|x| \end{array}$$

   est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 17 : Limite de la dérivée

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ une fonction telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = g\left(x^2\right).$$

Exercice 18 : Une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que
$$\forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0.$$
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3 Convexité

Définition, propriétés élémentaires

Exercice 19 : Intervalle

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$I + J := \{x + y : x \in I \quad \text{et} \quad y \in J\}$$

est un intervalle.

Exercice 20 : Opérations élémentaires sur les fonctions convexes

1. Étant donné une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ et une fonction g convexe et croissante sur $\mathbb{R}$, montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs strictement positives. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe, alors f est convexe.

Exercice 21 : Bijection réciproque

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective convexe. Que dire de f^{-1} ?

Convexité et dérivation

Exercice 22 : Inégalités en vrac

1. Donner deux méthodes différentes pour montrer que quel que soit le réel x
$$e^x \geqslant 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0.$$
3. Soit $x \in]1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$x^n - 1 \geqslant n\left(x^{\frac{n+1}{2}} - x^{\frac{n-1}{2}}\right).$$

Exercice 23 : Fonctions convexes majorées

1. Soit f une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
2. Donner un exemple de fonction convexe et majorée sur $]0, +\infty[$ et qui ne soit pas constante.

Exercice 24 : Moyenne arithmétique, harmonique et géométrique

Soit $x_1, \dots, x_n$ n réels strictement positifs. On définit leurs moyennes arithmétique, géométrique et harmonique par

$$a \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \quad g \coloneqq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k},$$

$$\frac{1}{h} \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}.$$

Montrer que

$$h \leqslant g \leqslant a.$$

Exercice 25 : Inégalités de Hölder et Minkowski

Soit p et q deux réels strictement supérieurs à 1 tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Soit $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des réels positifs.

1. Le but de cette question est de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

   (a) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

   (b) Montrer le résultat demandé lorsque

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^p = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} y_k^q = 1.$$

   (c) En déduire le cas général

2. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$