Dénombrement

1 Cardinal

Équipotence

Exercice 1 : Non dénombrabilité de $[0,1]$

Le but de cet exercice est de démontrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de $[0,1]$ telle que

$$\forall x \in [0,1], \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad u_n = x.$$

1. Construire deux suites (a_n) et (b_n) de réels telles que
   — $a_0 = 0 \quad \text{et} \quad b_0 = 1.$
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n.$
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(b_n - a_n).$
   — $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin [a_{n+1}, b_{n+1}].$
2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune $l \in [0,1]$, puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \neq l.$$

   Conclure.

Ensemble fini, cardinal

Exercice 2 : Ensemble d'entiers

Étant donnés 51 entiers compris entre 1 et 100, montrer qu'il en existe toujours 2 consécutifs.

Exercice 3 : Théorème d'approximation de Dirichlet

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\delta_k := kx - \lfloor kx \rfloor$. En appliquant le principe des tiroirs aux réels δ_k, montrer le théorème d'approximation de Dirichlet

$$\exists p \in \mathbb{Z}, \quad \exists q \in [\![1, n]\!], \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer qu'il existe une infinité de $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

   (b) Montrer qu'il existe une infinité de $p \in \mathbb{Z}$ pour lesquels

$$\exists q \in \mathbb{N}^*, \quad \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

3. On admet que π est irrationnel. Dans ces conditions $\sin n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on peut poser

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \frac{1}{n \sin n}.$$

   On souhaite montrer que la suite (u_n) n'admet pas de limite. On raisonne par l'absurde et on suppose que (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
   (a) Montrer que $l = 0$.
   (b) Obtenir une contradiction en appliquant les résultats de la question 2.b au réel π.

Exercice 4 : 7 nombres réels

Soit sept nombres réels $x_1, \dots, x_7$. Montrer qu'il existe deux indices i et j distincts tels que

$$0 < \frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} < \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot$$

Rappelez vous que la trigonométrie se cache même aux endroits où on ne l'attend pas.

2 Dénombrement

Dénombrement élémentaire

Exercice 5 : Couples dans le plan

Combien y a-t-il de couples (i, j)

1. dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $i + j = n$?
2. dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $i < j$?
3. dans $[\![1, n]\!] \times [\![1, 2n]\!]$ pour lesquels $i < j$?
4. dans $[\![1, n]\!]^2$ pour lesquels $|i - j| \leqslant 1$?

Exercice 6 : Autour du crible

Une certaine ville compte 17 500 actifs dans sa population. À l'issue d'un recensement, on a obtenu les informations suivantes sur ces 17 500 actifs :

— 4 actifs sur 7 sont des femmes et 6 d'entre elles sur 10 ont voté aux dernières municipales.
— 3 actifs sur 5 ont voté aux dernières municipales et 40% de ces personnes sont au chômage.
— Le chômage touche 1 actif sur 4 et 60% des demandeurs d'emploi sont des femmes.
— 60% des femmes au chômage ont voté aux dernières municipales.

Combien d'hommes qui ne sont pas au chômage sont restés chez eux le jour des élections municipales ?

Arrangement, combinaison

Exercice 7 : Anagrammes

Dénombrer les anagrammes des mots suivants

COUVERT, COUTEAU, FOURCHETTE.

Exercice 8 : Le livreur

Un livreur doit distribuer des colis à cinq personnes A, B, C, D, E. Combien y a-t-il de trajets possibles ? S'il souhaite livrer A avant B et C, combien y a-t-il de trajets possibles ?

Exercice 9 : Surjections d'un ensemble fini dans un autre

Quels que soient $n, p \in \mathbb{N}$, on note $S_{p,n}$ le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

1. On suppose que $p \leqslant n$. Que vaut $S_{p,n}$?
2. Calculer $S_{n+1,n}$ et $S_{p,2}$.
3. Montrer que

$$\forall p, n \in \mathbb{N}, \quad n^p = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{p,i}.$$

Exercice 10 : Partitions d'un ensemble

Quels que soient $n, p \in \mathbb{N}$, on note $P_{n,p}$ le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal np en n parties à p éléments. Montrer que

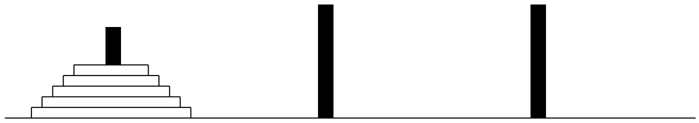
$$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1,p} = \frac{1}{n+1} \binom{(n+1)p}{p} P_{n,p}.$$

En déduire $P_{n,p}$.

Exercice 11 : Tours de Hanoï

Le jeu des tours de Hanoï se compose de trois tiges sur lesquelles on peut empiler n disques deux à deux distincts ($n \geq 1$). Initialement, les n disques sont empilés sur la première tige, par ordre décroissant de taille, du bas vers le haut. Le but du jeu est de transporter la tour complète sur une autre tige par une suite de mouvements consistant à déplacer un disque à la fois, et en respectant les deux règles suivantes :

- on ne peut ôter d'une tige que le disque se trouvant au sommet de la pile ;
- on ne peut empiler un disque sur une tige que si elle est vide ou bien si l'on pose le disque en question sur un autre plus grand.



Notons a_n le nombre minimal de mouvements nécessaires au transport de la tour initiale de n disques.

1. Montrer que $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$.
2. Établir une relation entre a_{n+1} et a_n pour tout $n \geq 1$.
3. Montrer que $a_n = 2^n - 1$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 12 : Exercice

Sur une étagère, on range les n tomes d'une encyclopédie. Combien y a-t-il de manières de les ranger tout en étant sûr que le tome 1 et le tome 2 sont côte à côte et dans cet ordre ?

Exercice 13 : Exercice

De combien de façons différentes peut-on ranger les nombres $1, 2, \ldots, n$ si l'on veut que le produit de deux nombres voisins soit toujours pair ?

Exercice 14 : Exercice

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. La boule 1 est jaune, les boules 2 et 3 sont bleues, les boules 4,5,6 sont rouges et les boules 7,8,9,10 sont vertes. On tire dans l'urne successivement et avec remise 5 boules. Le résultat est donc la liste ordonnée des cinq numéros des boules tirées. Déterminer le nombre de résultats

1. en tout,
2. pour lesquels les cinq boules sont toutes de la même couleur,
3. pour lesquels les quatre couleurs apparaissent parmi les cinq boules,
4. pour lesquels la boule numéro 8 a été tirée et exactement deux des boules tirées sont rouges.

Exercice 15 : Exercice

On dispose de trois urnes notées A, B, C et de six boules. On répartit les six boules dans les trois urnes (chaque urne peut contenir de 0 à 6 boules). Une répartition est une liste ordonnée de trois nombres indiquant le nombre de boules contenues dans les urnes A, B, C. Par exemple, la répartition $(2, 4, 0)$ indique que l'urne A contient 2 boules, l'urne B en contient 4 et l'urne C est vide. Déterminer le nombre de répartitions

1. en tout,
2. telles que l'urne A est vide,
3. telles que l'urne A est la seule urne vide,
4. telles qu'une urne et une seulement est vide,
5. telles qu'aucune urne est vide,
6. telles qu'au moins une urne est vide.

Exercice 16 : Exercice

On considère un quadrillage de n lignes et m colonnes. On part de la case en haut à gauche pour arriver à la case en bas à droite. Les seuls mouvements possibles sont de se déplacer d'une case à droite ou d'une case en bas. Combien existe-t-il de chemins ?

Exercice 17 : Exercice

Un domino est un rectangle constitué de deux carrés, chacun comportant entre 0 et 6 points.

1. Combien existe-t-il de dominos ?
2. Combien de paires peut-on former avec des dominos ayant un nombre en commun ?

Exercice 18 : Exercice

Soit E un ensemble de cardinal $2n$. On appelle partition de E en paires tout ensemble $\{\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\}\}$ avec pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i \neq b_i$ et $(\{a_1, b_1\}, \dots, \{a_n, b_n\})$ est une partition de E. Dénombrer les partitions de E en paires.

Exercice 19 : Exercice

Soit E une partie de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer de deux manières différentes les couples $(a, A) \in E \times \mathcal{P}(E)$ tels que $a \notin A$. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Exercice 20 : Compter les matrices

Combien existe-t-il de matrices de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ dont les entrées sont « 0 » ou « 1 » et

1. dont chaque ligne contient exactement un coefficient « 1 » ?
2. dont chaque ligne contient exactement deux coefficients « 1 » ?
3. dont chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un coefficient « 1 » (on suppose ici $q = p$) ?

Exercice 21 : Le crible

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!.$$
On pourra appliquer la formule du crible aux ensembles $[\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
2. Simplifier de même
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$
pour tout $p \in [\![0, n]\!]$.

Exercice 22 : Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre d'applications f de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).