Corps, polynomes

1 Anneau, corps

Anneau

Exercice 1 : Anneau de Boole

Soit E un ensemble. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit $A \Delta B$ par

$$A \Delta B \coloneqq (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on définit la fonction caractéristique de A comme l'application $\mathbb{1}_A : A \to \mathbb{F}_2$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) \coloneqq \begin{cases} \bar{1} & \text{si } x \in A \\ \bar{0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{1}_{A \Delta B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$ et $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
2. En déduire que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif.
3. Montrer que cet anneau est intègre si et seulement si E possède un unique élément.

Exercice 2 : Fonction définie sur un anneau

Soit $(A, +, \times)$ un anneau et f une application de A dans $\mathbb{R}_+$ telle que
— $\forall x \in A, \quad f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
— $\forall x, y \in A, \quad f(xy) = f(x)f(y)$.
— $\forall x, y \in A, \quad f(x + y) \leqslant \max(f(x), f(y))$.
Montrer que $\{x \in A \mid f(x) \leqslant 1\}$ est un sous-anneau de A.

Exercice 3 : Anneau

Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$A \coloneqq \left\{ \frac{p}{a^n} : p \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer $A^\times$.

Exercice 4 : Inversibles dans un anneau

On rappelle que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \coloneqq \{a + \mathrm{i}b : a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $|z|^2 \in \mathbb{N}$. En déduire $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]^\times$
2. Montrer que
$$\mathbb{Z}\left[\mathrm{i}\sqrt{2}\right] \coloneqq \left\{a + \mathrm{i}b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$
est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, puis déterminer $\mathbb{Z}\left[\mathrm{i}\sqrt{2}\right]^\times$.

Exercice 5 : Éléments nilpotents

Soit A un anneau. Un élément $x \in A$ est dit nilpotent lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^p = 0$. Si tel est le cas, le plus petit entier p satisfaisant cette relation est appelé *indice de nilpotence* de x.

1. Montrer que si A est intègre, 0 est le seul élément nilpotent de A.
2. Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents qui commutent sont encore nilpotents.
3. Si $x \in A$ est nilpotent, montrer que $1 - x$ est inversible et calculer $(1 - x)^{-1}$.

Exercice 6 : Centre

Soit A un anneau.

1. On appelle centre de A et on note $Z(A)$ l'ensemble des éléments de A qui commutent avec tous les éléments de A. Montrer que $Z(A)$ est un sous-anneau de A.
2. On suppose que
$$\forall x \in A, \quad x^3 = x.$$
   (a) Montrer que
   $$\forall x, y \in A, \quad xy = 0 \quad \Longrightarrow \quad yx = 0.$$
   (b) Soit $x \in A$ tel que $x^2 = x$. En étudiant $x(y - xy)$ pour $y \in A$, montrer que $x \in Z(A)$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in A$, $x^2 \in Z(A)$.
   (d) En déduire que A est commutatif.

Corps

Exercice 7 : Morphisme de corps

Montrer qu'un morphisme de corps est toujours injectif. Trouver un morphisme d'anneaux non injectif.

Exercice 8 : Extension quadratique

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$. On pose
$$\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) \coloneqq \left\{a + b\sqrt{\alpha} : (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$$

1. Soit $x \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{\alpha}\right)$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $x = a + b\sqrt{\alpha}$.
2. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
3. Pour $x = a + b\sqrt{\alpha} \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$, on pose $\overline{x} = a - b\sqrt{\alpha}$; on l'appelle le conjugué de x. Montrer que l'application $x \mapsto \overline{x}$ est bien définie et est un automorphisme du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$.
4. Montrer que l'automorphisme construit à la question précédente est le seul automorphisme non trivial de $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$.

2 Espace vectoriel, algèbre

Espace vectoriel

Algèbre

3 L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

Définition

Exercice 9 : Produit

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ tels que
$$P = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k X^k.$$
Montrer que $\mathcal{A}$ est stable par produit.

Substitution

Degré d'un polynôme

Exercice 10 : Équations sur $\mathbb{R}[X]$

Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$
On commencera par effectuer une analyse et on cherchera des informations sur le degré de P.

Exercice 11 : Division euclidienne

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le reste de la division euclidienne

1. de $X^n(X+1)^2$ par $(X-1)(X-2)$.
2. de X^n par $(X-1)^2(X+1)$.
3. de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par X^2+X+1.

Racines, fonctions polynôme

Exercice 12 : Exercice

1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = n^2.$$
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = n^2 + (-1)^n.$$

Exercice 13 : Polynômes de Tchebychev

On définit la suite de polynômes (T_n) par
$$T_0 \coloneqq 1, \quad T_1 \coloneqq X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} \coloneqq 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Calculer les polynômes T_n pour $n \in [\![0,5]\!]$.
2. Calculer le degré de T_n et son coefficient dominant.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est l'unique polynôme tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos(nx).$$
4. En déduire les racines de T_n.
5. En dérivant deux fois la relation obtenue dans la question 3, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2 T_n = 0.$$
6. Déterminer une expression explicite de T_n en exploitant la formule de Moivre.

Exercice 14 : Exercice

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{e}^{kx}.$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est intègre.
3. Déterminer $U_{\mathcal{A}}$.

Exercice 15 : Polynômes de Lagrange

Soit $n \geqslant 2$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes
$$\sum_{i=1}^{n} L_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i L_i.$$

Exercice 16 : Polynômes de Lagrange

On note $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange de $0, \dots, n$.

1. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.
2. Exprimer de deux manières différentes l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P(k) = k^n.$$
3. En déduire une simplification de
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n.$$

Exercice 17 : Exercice

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de P pour que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \in \mathbb{R}.$$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de P pour que

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad P(x) \in \mathbb{Q}.$$

On pourra utiliser les polynômes de Lagrange.

Polynôme dérivé

Exercice 18 : Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. On pose

$$S \coloneqq \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \quad \text{et} \quad P \coloneqq \sum_{i=k}^{n} (X+1)^i.$$

1. Exprimer S en fonction de $P^{(k)}(0)$.
2. Simplifier $(X+1)P - P$, puis dériver $k+1$ fois la relation obtenue.
3. En déduire une expression simple de S.

Exercice 19 : Équations sur $\mathbb{R}[X]$

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(2X) = P'(X)P''(X).$$

2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X(X+1)P'' + (X+2)P' - P = 0.$$

Exercice 20 : Coefficients binomiaux

On donne un entier $n \geqslant 1$.

1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, calculer la dérivée n-ième du polynôme $P = (X-a)^n (X-b)^n$.
2. En déduire une expression simplifiée de la somme

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Exercice 21 : Primitive

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Montrer que

$$Q \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k P^{(k)}(X)}{(k+1)!} X^{k+1}$$

est l'unique primitive de P qui s'annule en 0.