Continuité, limites

1 Fonction numérique, topologie élémentaire

Exercice 1 : Monotonie

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 2 : Une fonction périodique étrange

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}$. *On a donc construit une fonction périodique non constante qui n'admet pas de plus petite période strictement positive.*

Propriété locale

2 Limite

Définition, propriétés élémentaires

Exercice 3 : Non existence d'une limite

Montrer que la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$\forall x \in \,]0,1[\,, \quad f(x) := \sin\left(\frac{1}{x - x^2}\right)$$

n'a pas de limite en 0.

Exercice 4 : Manipulation de limite

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

En remarquant que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right] + f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

montrer que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Limite et ordre sur $\mathbb{R}$

Limite à gauche, limite à droite

Exercice 5 : Existence et calculs de limites

Existence et calcul des limites des expressions suivantes

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ à droite en } 0, \qquad x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0,$$

$$x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \text{ en } 0, \qquad \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ en } 0, \qquad \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}} \text{ en } +\infty.$$

Exercice 6 : Existence et calculs de limites

Existence et calcul des limites des expressions suivantes

$$\textbf{a.}\ \frac{6x^2+5x-4}{2x-1} \text{ en } \frac{1}{2}, \qquad \textbf{b.}\ \frac{3}{x^3-1}-\frac{2}{x^2-1} \text{ en } 1,$$

$$\textbf{c.}\ x^n \mathrm{e}^{-1/x^2} \text{ en } 0 \text{ avec } n\in\mathbb{Z}, \qquad \textbf{d.}\ \frac{\ln(\operatorname{ch}(\alpha x))}{\ln(\operatorname{ch} x)} \text{ en } +\infty \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R},$$

3 Continuité

Continuité ponctuelle

Exercice 7 : Continuité par la monotonie

1. Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si f est décroissante et $x\mapsto xf(x)$ est croissante, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que

$$f:\begin{array}{ccl}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}}\end{array}$$

est continue.

Exercice 8 : Une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x):=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & \text{si } x\in\mathbb{Q} \text{ et } x=\frac{p}{q} \text{ avec } (p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \text{ et } p\wedge q=1.\end{cases}$$

1. Montrer que f est discontinue en tout $x\in\mathbb{Q}$.
2. Le but de cette question est de montrer que f est continue en tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.
   (a) Soit (p_n) une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ et (q_n) une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$ telles que

$$\frac{p_n}{q_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

   Montrer que $(q_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.
   (b) En déduire que f est continue en x.

Exercice 9 : Équations fonctionnelles

1. Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, continues en 0, telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x)=f(x).$$

2. Déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x)-f(x)=x.$$

Exercice 10 : Une équation fonctionnelle

1. Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \sin\frac{x}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^n}.$$

2. Déterminer les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(2x)=f(x)\cos x.$$

Exercice 11 : Une équation fonctionnelle

On cherche à déterminer l'ensemble des applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

1. Soit f une telle application.
   (a) On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
   Dans la suite, on suppose que f ne s'annule pas.
   (b) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0.$$
   (c) En déduire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{ax}.$$
   On pourra utiliser le résultat d'un exercice similaire vu en cours.
2. Conclure.

Exercice 12 : Prolongement d'inégalités

1. Soit f et g deux fonctions continues $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que
   $$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) < g(x).$$
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$
   (b) Montrer que l'on a pas nécessairement
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) < g(x).$$
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que
   $$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$
   Montrer que f est strictement croissante, c'est-à-dire que
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y).$$

Exercice 13 : Limite uniforme de fonctions continues

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que f est continue.

Continuité sur une partie

Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 14 : Point fixe

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que I est stable par f et que $f \circ f$ possède un point fixe. Montrer que f en possède un aussi.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante. Montrer que f possède un et un seul point fixe.

Exercice 15 : Équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions f, continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)^2 - 2xf(x) - 1 = 0.$$

Exercice 16 : Théorème de la corde raide

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que
$$f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f(x).$$
2. Montrer que si un coureur parcourt 20 km en une heure, il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel il a exactement parcouru 10 km.
3. Plus généralement, montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que
$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$
4. Si $\alpha \in [0,1]$, existe-t-il toujours $x \in [0, 1-\alpha]$ tel que $f(x+\alpha) = f(x)$?

Exercice 17 : Preuve du théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$ et l'on souhaite montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$. Comme c'est immédiat lorsque $f(b) = 0$, on suppose que $f(b) > 0$. On pose alors
$$X \coloneqq \{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant 0\}.$$

1. Montrer que X admet une borne supérieure que l'on note c, puis que $c \in [a,b]$.
2. Montrer que $f(c) \leqslant 0$.
3. Montrer que $c < b$, puis que $f(c) \geqslant 0$. Conclure.

Exercice 18 : Monotonie des injections continues sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur un intervalle I. Le but de cet exercice est de montrer que f est strictement monotone. On raisonne par l'absurde et on suppose que f ne l'est pas. On pose
$$A \coloneqq \{(x,y) : x, y \in I \quad \text{et} \quad x < y\}.$$

1. Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que $f(x_0) \leqslant f(y_0)$ et $(x_1, y_1) \in A$ tel que $f(x_1) \geqslant f(y_1)$.
2. Montrer soigneusement que
$$\forall t \in [0,1], \quad (tx_0 + (1-t)x_1, ty_0 + (1-t)y_1) \in A.$$
3. On définit la fonction g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ par
$$\forall t \in [0,1], \quad g(t) \coloneqq f(tx_0 + (1-t)x_1) - f(ty_0 + (1-t)y_1).$$
Montrer qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $g(t) = 0$ et conclure.

Exercice 19 : Équation fonctionnelle

On cherche à déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$(E) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x^2 + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue solution de (E).
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x) \quad \text{ou} \quad f(-x) = f(x).$$
   En déduire que f est impaire.
   (b) Montrer que
   $$\forall x, y \geqslant \mathbb{R}_+, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$
   puis en déduire la forme de f.
2. Déterminer toutes les fonctions continues vérifiant (E).

Exercice 20 : Dilatation

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant a\,|x - y|.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que f est strictement monotone, puis surjective.

Théorème de compacité

Exercice 21 : Fonctions bornées

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 22 : Théorème des bornes atteintes

1. Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique est bornée et atteint ses bornes.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que
$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \sup_{x\in]a,b[} f(x).$$
On commencera par montrer que ces bornes supérieures existent.
3. Soit f et g deux fonctions continues définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall x \in [a, b]\,, \quad 0 < f(x) < g(x).$$
Montrer qu'il existe $k \in \,]0, 1[$ tel que
$$\forall x \in [a, b]\,, \quad f(x) \leqslant kg(x).$$

Exercice 23 : Théorème des bornes atteintes

Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On définit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) \coloneqq \sup_{x\in[a,b]} \left(f(x) + tg(x)\right).$$

1. Montrer que h est bien définie.
2. On pose
$$M \coloneqq \sup_{x\in[a,b]} |g(x)|\,.$$
Montrer que h est M-lipschitzienne. En déduire qu'elle est continue.

Exercice 24 : Exercice

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$.

1. Montrer que f est bornée.
2. f atteint-elle ses bornes ?

Continuité uniforme

Exercice 25 : Fonctions Hölderiennes

Soit $\alpha > 0$. On dit qu'une fonction f est α-Hölderienne lorsqu'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant c\,|x - y|^{\alpha}\,.$$

1. Montrer que si f est α-Hölderienne avec $\alpha > 1$, f est constante.
2. Montrer que si f est α-Hölderienne, f est uniformément continue.

Exercice 26 : Généralisation du théorème de Heine

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} l_1 \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l_2$$
Le but de cet exercice est de montrer que f est uniformément continue.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \leqslant b$ tels que
$$\forall x, y \in \,]-\infty, a]\,, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall x, y \in [b, +\infty[\,, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
2. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que
$$\forall x, y \in [a, b]\,, \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
3. Conclure.

Exercice 27 : Uniforme continuité

Soit f une fonction uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leqslant a + b\,|x|\,.$$