Compléments d'analyse

1 Le corps ordonné $\mathbb{R}$

La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Exercice 1 : Inégalités

1. Montrer que pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+$
$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geqslant 8abc.$$
2. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leqslant b$, on a
$$\frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{b} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{a}.$$
3. Montrer que si $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+^*$ sont tels que $a+b=1$, alors
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geqslant \frac{1}{ax+by}.$$

Exercice 2 : Puissances

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que
$$(x+y)^{\frac{1}{n}} \leqslant x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}.$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
3. Soit a et b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$n(b-a)a^{n-1} \leqslant b^n - a^n \leqslant n(b-a)b^{n-1}.$$
4. Soit $a, b, c \in [0,1]$. Montrer qu'au moins un des trois nombres réels
$$a(1-b), \quad b(1-c), \quad c(1-a)$$
est inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 3 : Système non linéaire

Soit $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n.$$
Montrer que $x_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 4 : Système non linéaire

On suppose que $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^{*4}$ vérifie le système
$$\begin{cases} x + y + z = t \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t} \end{cases}$$
Établir que $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$, et en déduire la forme générale des solutions du système ci-dessus.

Valeur absolue

Racine

Partie entière, approximation

Exercice 5 : Rationnels et irrationnels

1. Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Peut-on affirmer que $a+b$ (respectivement $a \times b$) appartient à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$? Et si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
2. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

Exercice 6 : Intersection d'une famille infinie

Déterminer
$$\cap_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]\quad\text{et}\quad\cap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[.$$

Exercice 7 : Autour de la partie entière

Soit x et y deux nombres réels et $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$\lfloor x+y\rfloor \geqslant \lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor.$$
Y a-t-il des cas d'égalité ? D'inégalité stricte ?
2. Montrer que $\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor$.

Exercice 8 : Calcul de somme

1. Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathbb{Z}\\ -1 & \text{sinon.}\end{cases}$$
2. En déduire que si $p,q\in\mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux
$$\sum_{k=1}^{q-1}\left\lfloor k\cdot\frac{p}{q}\right\rfloor=\frac{(p-1)\,(q-1)}{2}$$

Intervalle

2 Fonction réelle d'une variable réelle

Définition

Exercice 9 : Bijection

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\coloneqq\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1. Montrer que f est impaire puis qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser.
2. Déterminer f^{-1}, puis tracer les graphes de f et f^{-1}.

Symétries

Exercice 10 : Symétries de la bijection réciproque

Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ impaire et bijective. Montrer que f^{-1} est impaire.

Exercice 11 : Une fonction périodique étrange

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)\coloneqq\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des périodes de f est $\mathbb{Q}$. On a donc trouvé une fonction périodique qui n'admet pas de plus petite période strictement positive.

Monotonie

Exercice 12 : Monotonie

Soit $f:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ une fonction telle que $f\circ f$ est croissante et $f\circ f\circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 13 : Monotonie et théorèmes usuels

Donner la monotonie (si possible sans dériver) des fonctions d'expressions

$$\textbf{a. } \mathrm{e}^{-1/x^2}, \qquad \textbf{b. } \mathrm{e}^{1/x^3}, \qquad \textbf{c. } x\ln(\cos x) \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[,$$

$$\textbf{d. } x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \text{ sur }]1,+\infty[, \qquad \textbf{e. } \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*,$$

$$\textbf{f. } \sin\big((\mathrm{e}^{-x}-1)\,\pi/2\big) \text{ sur } \mathbb{R}_+.$$

Fonction majorée, minorée, bornée

3 Fonction continue, fonction dérivable

Continuité

Exercice 14 : Domaine de continuité

On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}.$$

Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ en lesquels f est continue.

Dérivabilité

Exercice 15 : Fonction définie par morceaux

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) \coloneqq \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que g soit continue sur $[0,1]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que g soit dérivable sur $[0,1]$.

Exercice 16 : Bijection

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) \coloneqq \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.

Dans la suite, on note $g : J \to \mathbb{R}_+^*$ la bijection réciproque de la corestriction de f à J.

2. Discuter de la monotonie de g, de sa continuité et sa dérivabilité. Expliciter la dérivée de g sur J.
3. Expliciter $g(y)$ en résolvant directement l'équation $f(x) = y$ et retrouver les propriétés établies à la question précédente.

Exercice 17 : Bijection

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Donner les symétries et la monotonie de $g \coloneqq f^{-1}$.
3. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x)^2 - f(x)^2 = 1.$$

   En déduire que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. Expliciter g^{-1} en résolvant directement l'équation $f(x) = y$.

Dérivation et monotonie

Exercice 18 : Études de variations

Étudier les variations des fonctions suivantes

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad \text{et} \quad x \mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

Dérivation des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

4 Intégration, primitive

Primitive

Exercice 19 : Bijection

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dans cet exercice, il est interdit d'utiliser la fonction Arcsin*.*

1. Montrer que f admet une unique primitive F s'annulant en 0.
2. Montrer que $F(x)$ admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers 1.
3. Montrer que F est impaire.

On définit la fonction φ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ par

$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad \varphi(x) := F(\sin x).$$

4. En dérivant φ, montrer que
$$\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[, \quad F(\sin x) = x.$$
5. En déduire la valeur de l.

Intégration et régularité

Intégration et inégalité

Exercice 20 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit g la fonction d'expression

$$g(x) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^t}{1 + x\sin t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g est définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que g est décroissante.

Exercice 21 : Sommes de Riemann de fonctions monotones

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0,1]$. On définit la suite (u_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right).$$
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$
$$u_n - \frac{1}{n}\left(f(1) - f(0)\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n.$$
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. En donner une interprétation géométrique.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite (v_n) définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n := \sum_{k=0}^{n} k^\alpha.$$
Montrer que
$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$
c'est-à-dire que la suite de terme général
$$v_n \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$$
converge vers 1.

Intégration par parties, changement de variable

Exercice 22 : Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n et J_n par
$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t \qquad J_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
2. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont positives et décroissantes. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
4. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$
5. En déduire que
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
c'est-à-dire que la suite de terme général $I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ converge vers 1.

Exercice 23 : Intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n := \int_0^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x.$$

1. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}.$$

Calcul de primitive

Exercice 24 : Calcul de primitives

Donner le domaine de définition et calculer les primitives suivantes

a. $\int (x^2+x+1)\,\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$, **b.** $\int (x^2-1)\cos x \, \mathrm{d}x$, **c.** $\int x^3 \ln x \, \mathrm{d}x$,

d. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$, **e.** $\int \sin x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$, **f.** $\int \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$,

g. $\int \frac{x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$, **h.** $\int \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x$, **i.** $\int \ln^n x \, \mathrm{d}x$ (pour $n \in \mathbb{N}$).