Compléments d'algèbre

1 Somme et produit

Somme

Exercice 1 : Sommes

Simplifier les sommes suivantes.

$$\textbf{a.}\ \sum_{k=0}^{n} k(k-1), \qquad \textbf{b.}\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1), \qquad \textbf{c.}\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$$

$$\textbf{d.}\ \sum_{k=0}^{n}(k+n), \qquad \textbf{e.}\ \sum_{k=1}^{n+1}\frac{2^k}{3^{2k-1}}, \qquad \textbf{f.}\ \sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 2 : Décomposition en éléments simples

1. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{a}{3k+1} + \frac{b}{3k+4}.$$

2. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}.$$

Exercice 3 : Sommes

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n\frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 4 : Récurrence

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

Exercice 5 : Somme lacunaire de coefficients binomiaux

En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les sommes

$$A_n := \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad B_n := \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ impair}}}\binom{n}{k}.$$

Exercice 6 : Coefficients binomiaux

Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant p$

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 7 : Coefficients binomiaux

Simplifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Produit

Exercice 8 : Produits

Simplifier les produits suivants en les exprimant le plus possible à l'aide de puissances et de factorielles.

$$\textbf{a. } \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)}, \qquad \textbf{b. } \prod_{k=1}^{n} (-5)^{k^2-k}, \qquad \textbf{c. } \prod_{k=1}^{n} \frac{4^k}{k^2}$$

$$\textbf{d. } \prod_{k=0}^{n} (2k+1), \qquad \textbf{e. } \prod_{k=1}^{n} (4k^2-1), \qquad \textbf{f. } \prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}.$$

Exercice 9 : Produit

Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$P_n \coloneqq \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right).$$
Calculer $(1-z)P_n$ et en déduire une expression simple de P_n.

Exercice 10 : Majoration

1. (a) Montrer que
$$\forall k \geqslant 2, \quad 1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}.$$
   (b) En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant 4.$$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 11 : Limite

1. Factoriser $k^3 - 1$ par $k-1$ et k^3+1 par $k+1$ pour tout $k \geqslant 2$.
2. En déduire, sans récurrence, que pour tout $n \geqslant 2$
$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2+n+1}{n(n+1)}.$$
3. En déduire la limite de la suite de terme général
$$u_n \coloneqq \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

Somme et produit doubles

Exercice 12 : Sommes

Simplifier les sommes suivantes.

$$\textbf{a. } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} i, \qquad \textbf{b. } \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} j, \qquad \textbf{c. } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)$$

$$\textbf{d. } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x^{i+j}, \qquad \textbf{e. } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j+1}, \qquad \textbf{f. } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j-i)$$

$$\textbf{g. } \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i^2}{j}, \qquad \textbf{h. } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^2, \qquad \textbf{i. } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j).$$

Exercice 13 : Avec des racines n-ièmes

Soit $n \geqslant 2$ et $z \in \mathbb{C}$. On pose $\omega := e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + \omega^k\right)^n.$$

Calculer S_n.

Exercice 14 : Somme double

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{i-j} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2 \\ 0 \leqslant i+j \leqslant n}} \binom{n}{i+j}.$$

Exercice 15 : Somme de Gauss

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair. On pose

$$\omega := e^{\frac{2i\pi}{n}} \quad \text{et} \quad S := \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}.$$

1. Écrire $|S|^2$ comme une somme double, puis montrer que

$$|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}.$$

2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.
   (a) Montrer que la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & \omega^{2pk+p^2} \end{array}$$

   est n-périodique.
   (b) En déduire pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ une écriture simplifiée de

$$\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}.$$

3. Simplifier

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$$

   pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
4. En déduire que $|S| = \sqrt{n}$.

Fonction polynôme

Exercice 16 : Polynôme à coefficients symétriques

1. Montrer que le changement de variable $u := z + 1/z$ simplifie l'équation

$$z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$$

   en une équation du second degré en u.
2. En déduire l'ensemble de ses solutions sur $\mathbb{C}$.
3. Sur le même modèle, résoudre l'équation

$$z^4 + z^3 - 10z^2 - z + 1 = 0.$$

Exercice 17 : Simplification de racine

On pose

$$a \coloneqq \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}+11}{2}}, \quad b \coloneqq \sqrt[5]{\frac{5\sqrt{5}-11}{2}} \quad \text{et} \quad x \coloneqq a-b.$$

On souhaite montrer que $x=1$.

1. Calculer ab.
2. En déduire que x est racine de $A(t) \coloneqq t^5+5t^3+5t-11$.
3. Montrer que 1 est la seule racine positive de A et conclure.

Exercice 18 : Inéquation

Résoudre l'inéquation

$$4x+2 \leqslant \sqrt{7x^3+15x^2+11x+3}.$$

On commencera bien entendu par donner son domaine de définition.

Exercice 19 : Coefficients binomiaux

Écrire la somme

$$\sum_{k=0}^{n} (1+z)^k$$

de deux manières différentes. En déduire

$$\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j}.$$

Exercice 20 : Méthode de Cardan

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $Q(z) \coloneqq z^3+az^2+bz+c$.

1. Pour quels $\alpha \in \mathbb{C}$ le polynôme $P(z) \coloneqq Q(z+\alpha)$ n'a-t-il pas de coefficient en z^2 ?

On choisit un tel α et on définit $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $P(z) = z^3-3pz+2q$.

2. (a) Soit $u \in \mathbb{C}^*$. Montrer que
$$u+\frac{p}{u}$$
est racine de P si et seulement si $w \coloneqq u^3$ est racine d'un trinôme R que l'on déterminera.
   (b) On note w_1 et w_2 les racines complexes de R. Soit u_1 une racine cubique de w_1. Montrer qu'il existe une unique racine cubique u_2 de w_2 telle que $u_1 u_2 = p$.
   (c) Déterminer les racines de Q en fonction de α, u_1, u_2 et j.
3. Déterminer les racines des polynômes
$$z^3+3z^2+6z+2, \qquad z^3-3z-1.$$

C'est pour résoudre de telles équations, pour lesquelles P admet trois racines réelles, mais R n'en n'a pas, que Rafael Bombelli *(1526–1572) a introduit les nombres complexes.*

Exercice 21 : Méthode de Ferrari

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $P(z) \coloneqq z^4+az^3+bz^2+cz+d$.

1. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Q(z) \coloneqq P(z+\alpha)$ ne possède pas de terme en z^3.

Pour la suite, α désignera cette valeur. Il existe donc $p, q, r \in \mathbb{C}$ tels que $Q(z) = z^4+pz^2+qz+r$.

2. Soit $v \in \mathbb{C}$. Montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad Q(z) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(z^2+\frac{v}{2}\right)^2 = (v-p)\,z^2 - qz + \left(\frac{v^2}{4}-r\right).$$
On pose alors $A(z) \coloneqq (v-p)\,z^2 - qz + \left(v^2/4 - r\right)$.
3. Montrer que A admet une racine double si et seulement si v est racine d'un polynôme B de degré 3 que l'on déterminera.

Pour la suite, on suppose que $P(z) \coloneqq z^4-2z^3+3z^2+4zQ-10$.

4. Montrer que B admet une racine évidente. En déduire les racines de P.

On a ainsi prouvé, dans les deux exercices précédents, que l'on pouvait calculer les racines des équations de degré 3 et 4 à l'aide de racines n-ièmes de nombres complexes. Ces résultats étaient connus dès le 16e siècle. Niels Abel *(1802–1829), puis* Évariste Galois *(1811–1832), ont démontré qu'il n'était pas possible de résoudre l'équation générale de degré 5 en utilisant des racines n-ièmes de nombres complexes.*

Exercice 22 : Principe du maximum pour les polynômes

Soit $P(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ une fonction polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n. On se donne un réel positif M tel que

$$\forall z \in \mathbb{U}, \quad |P(z)| \leqslant M.$$

1. On pose $\omega \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\frac{2\pi}{n+1}\right)$. Calculer
$$\sum_{j=0}^{n} P\left(w^j\right).$$
2. En déduire que $|P(0)| \leqslant M$.

2 Trigonométrie

Égalité modulaire

Formules de trigonométrie

Exercice 23 : Inégalité

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$|\sin(nx)| \leqslant n|\sin(x)|.$$

Exercice 24 : Équations trigonométriques

Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

a. $\cos(3x) = \sin(x)$, **b.** $\cos x + \sin x = 1 + \tan x$, **c.** $\sin x + \sin(2x) = 0$

d. $\tan(2x) = 3\tan x$, **e.** $2\sin x + \sin(3x) = 0$, **f.** $3\tan x = 2\cos x$

g. $\cos x = \sqrt{3}\sin x$, **h.** $2\cos(4x) + \sin x = \sqrt{3}\cos x$.

Exercice 25 : Équations trigonométriques

1. Résoudre les équations
$$\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x), \qquad \cos(5x) + 2\cos(3x) + 3\cos(x) = 0$$
2. Résoudre l'équation
$$\cos(x) + \sin(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$
en posant (soigneusement) $t \coloneqq \tan(x/2)$.

Exercice 26 : Calcul de somme

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} 3^k \sin^3\left(\frac{\theta}{3^{k+1}}\right).$$

Exercice 27 : Mon capitaine

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\cos(k\theta).$$

3 Récurrence linéaire

Récurrence linéaire d'ordre 1

Exercice 28 : Récurrences d'ordre 1

Déterminer une expression explicite des suites définies par

1. $u_0 \coloneqq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 2u_n + 1$.
2. $u_0 \coloneqq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 3 - \frac{u_n}{2}$.
3. $u_0 \coloneqq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 2u_n^2$.

Récurrence linéaire d'ordre 2

Exercice 29 : Récurrences doubles

Déterminer les suites définies par

$$\textbf{a. } a_0 \coloneqq 0, \quad a_1 \coloneqq -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} \coloneqq 5a_{n+1} - 6a_n,$$

$$\textbf{b. } b_0 \coloneqq 1, \quad b_1 \coloneqq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+2} \coloneqq -b_{n+1} - b_n,$$

$$\textbf{c. } c_0 \coloneqq 1, \quad c_1 \coloneqq -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} \coloneqq 4c_{n+1} - 4c_n + n.$$

Exercice 30 : Récurrence double

Déterminer une expression explicite de la suite (u_n) définie par

$$u_0 \coloneqq 1, \qquad u_1 \coloneqq 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} \coloneqq \frac{u_{n+1}^6}{u_n^5}.$$

Exercice 31 : Récurrence double avec second membre polynomial

On dira qu'une suite réelle (u_n) est solution de (E) lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 8u_n + 9n^2.$$

1. Montrer que (E) possède une solution de la forme $(an^2 + bn + c)$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. En déduire une expression explicite de l'unique solution de (E) telle que $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$.

Exercice 32 : Équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que

$$\forall x \geqslant 0, \quad f(f(x)) = 6x - f(x).$$

4 Système linéaire

Système linéaire à q équations et p inconnues

Exercice 33 : Résolution de systèmes linéaires

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y = 0 \\ 3x + 5y + z = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x + z = 1. \end{cases}$$

2. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x + 2y + 3z + 4t = b \\ x + 3y + 6z + 10t = c \\ x + 4y + 10z + 20t = d. \end{cases}$$

Exercice 34 : Équation fonctionnelle

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2.$$

Exercice 35 : Sytème de type Vandermonde

Soit a, b, c trois réels deux à deux distincts. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^4 \\ x + by + b^2z = b^4 \\ x + cy + c^2z = c^4. \end{cases}$$

Exercice 36 : Résolution de systèmes linéaires

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système
$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2. \end{cases}$$

2. Soit $m, a, b, c, \in \mathbb{R}$. Résoudre le système
$$\begin{cases} -mx + (m-1)\,y + mz = a \\ (2m-1)\,x + (m-1)\,y - mz = b \\ -2x - 4y + 2mz = c. \end{cases}$$

Exercice 37 : Système linéaire

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + my + z - mt = m+2 \\ mx - y - mz - t = -1. \end{cases}$$

Exercice 38 : Somme lacunaire de coefficients binomiaux

On définit A, B et C par
$$A \coloneqq \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 0\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}, \qquad B \coloneqq \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1\,[3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad C \coloneqq \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 2\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}.$$

1. Calculer $A + B + C$, $A + \mathrm{j}B + \mathrm{j}^2C$ et $A + \mathrm{j}^2B + \mathrm{j}C$.
2. En déduire A.
3. Sur le même modèle, étant donnés $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in [\![0, b-1]\!]$, calculer
$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv a\,[b]}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Interprétation géométrique lorsque $p = 2$ *ou* $p = 3$