Développements limités

1 Comparaison de suites

Suites équivalentes

Exercice 1 : Équivalents et composition par $\ln$

Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes strictement positives.

1. On suppose que (u_n) et (v_n) tendent vers 0 ou $+\infty$ en $+\infty$. Montrer que
$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n.$$
En déduire des équivalents simples de $\ln(n^2-1)$ et $\ln(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.
2. Que peut-on dire si (u_n) et (v_n) convergent vers 1 ?

Exercice 2 : Calcul d'équivalents

Donner un équivalent simple des suites de terme général
$$\textbf{a. } \ln(n+1)-\ln n, \qquad \textbf{b. } n(\sqrt[n]{3}-1), \qquad \textbf{c. } \sum_{k=1}^{n} k^{k^2}.$$

Exercice 3 : Équivalents

Soit (u_n) une suite réelle de limite nulle telle que
$$u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que si u_n est décroissante alors $u_n \sim 1/(2n)$.
2. Étudier le cas de la suite
$$u_n \coloneqq \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Suite négligeable devant une autre

Exercice 4 : Constante d'Euler

Soit (H_n) la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad H_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. En utilisant une intégrale, montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite, puis un équivalent de H_n.
4. Montrer que $u_n \coloneqq H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive. En déduire qu'il existe une constante (la constante d'Euler) γ telle que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).$$

Exercice 5 : Suite définie implicitement

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) \coloneqq nx^{n+1} - (n+1)x^n - \frac{1}{2}.$$

1. Démontrer que f_n admet une unique racine positive, notée x_n.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x).$$
En déduire que la suite (x_n) est décroissante.
3. Montrer que
$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$
4. Montrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad g(y) \coloneqq \mathrm{e}^y(y-1) - \frac{1}{2}$$
possède une unique racine, notée γ, dans $]0, +\infty[$. Donner une valeur numérique de γ à 10^{-3} près.
5. Établir que, si α est une constante strictement positive, alors $(f_n(1 + \frac{\alpha}{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $g(\alpha)$.
6. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $f_n(1 + \frac{\gamma+\varepsilon}{n})$ est ultimement positif, et que $f_n(1 + \frac{\gamma-\varepsilon}{n})$ est ultimement négatif.
7. En déduire que
$$x_n = 1 + \frac{\gamma}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 6 : Une suite implicite

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs telle que $x_n^n \ln(x_n) = 1$ pour tout entier n.
2. Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle tend vers 1.
3. Montrer que
$$x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{w(n)}{n}$$
où w est la fonction de Lambert, c'est-à-dire la fonction réciproque de $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Suite dominée par une autre

2 Comparaison de fonctions

Fonctions équivalentes

Exercice 7 : Composition d'équivalents

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$$

et que ces fonctions admettent une limite commune notée $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1. On suppose dans cette question que f et g sont à valeurs strictement positives.
   (a) Montrer que si $l \neq 1$, alors
   $$\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(g(x)).$$
   (b) Que pouvez-vous dire lorsque $l = 1$?
2. Parmi les équivalents suivants, lesquels sont systématiquement vrais ? (on pourra discuter selon les valeurs de l).
$$\textbf{a. } \operatorname{Arctan}(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \operatorname{Arctan}(g(x)), \qquad \textbf{b. } \mathrm{e}^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{g(x)},$$
$$\textbf{c. } \sin(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin(g(x)).$$

Fonction négligeable devant une autre

Fonction dominée par une autre

3 Développement limité

Définition, propriétés élémentaires

Exercice 8 : Existence de développement limité

1. $\sqrt{x}$ admet-elle un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 0 ?
2. À quels ordres $x^{\frac{13}{3}}$ admet-elle un développement limité en 0 ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $|x|^n$ admet-elle un développement limité d'ordre n en 0 ?

Développement limité et propriétés locales

Intégration et existence d'un développement limité

Développements limités usuels

Exercice 9 : Fonction définie par morceaux

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \cos\sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

À quels ordres f admet-elle un développement limité en 0 ?

Opérations usuelles sur les développements limités

Exercice 10 : Calcul

Calculer les développements limités suivants.

a. $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 4, **b.** $\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ en 0 à l'ordre 7,

c. $\frac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5, **d.** $\ln(1 + \operatorname{ch} x)$ en 0 à l'ordre 4,

e. $e^{\operatorname{Arcsin} x}$ en 0 à l'ordre 4 **f.** $\operatorname{Arctan}(e^x)$ en 0 à l'ordre 3

g. $\operatorname{Arccos}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$ en 0 à l'ordre 2, **h.** $\operatorname{Arctan}(2\sin x)$ en $\pi/3$ à l'ordre 3.

i. $\ln(1+\sin x) - \sin(\ln(1+x))$ en 0 à l'ordre 5, **j.** $\ln(\tan x)$ en $\pi/4$ à l'ordre 3,

Exercice 11 : Développement limité de $\tan x$

1. Donner un développement limité de tan en 0 à l'ordre 1.
2. En exploitant la relation $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, donner un développement limité de tan en 0 à l'ordre 3. Que peut on en déduire sur le graphe de f au voisinage de 0 ?
3. En déduire un développement limité de tan en 0 à l'ordre 5 puis à l'ordre 7.

Exercice 12 : Calcul

1. Donner le développement limité de
$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$$
en 0 à l'ordre 4.
2. Sur le même modèle, donner un développement limité de
$$\int_x^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
en 1 à l'ordre 3.

Exercice 13 : Logarithme et exponentielle

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ de

$$\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right).$$

4 Développement asymptotique

Développement limité généralisé en $a \in \mathbb{R}$

Exercice 14 : Calcul

Calculer les développements limités suivants.

a. $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$ en 0 à l'ordre 3, **b.** $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arcsin} x}$ en 0 à l'ordre 4.

c. $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ en 0 à l'ordre 3

Exercice 15 : Calcul de limites

Calculer les limites des expressions suivantes lorsqu'elles existent.

a. $(\tan x)^{\tan 2x}$ en $\dfrac{\pi}{4}$, **b.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0,

c. $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$ en 0, **d.** $\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1,

e. $\dfrac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{\sin x}{1-\sin x}\right)$ en 0

Exercice 16 : Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit f la fonction définie par

$$\forall x \in [-\pi/2, \pi/2]\,, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Développement asymptotique au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

Exercice 17 : Développement asymptotique de Arcsin **en** -1

1. Montrer que
$$\forall x \in [0,1], \quad \operatorname{Arcsin}\sqrt{x} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)\,.$$
2. En déduire un développement asymptotique de Arcsin en -1 à la précision x^2.

Exercice 18 : Équivalent

Donner un équivalent des expressions suivantes.

a. $\ln(\operatorname{ch} x)+\operatorname{sh}^2 x$ en 0, **b.** $\dfrac{\cos x}{1-x}-1$ en 0, **c.** $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ en π,

d. $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x+2}}$ en 1, **e.** $\dfrac{\cos x - x^x}{\mathrm{e}^x}$ en 0, **f.** $\sin(\operatorname{sh} x)-\operatorname{sh}(\sin x)$ en 0.

g. $\dfrac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}}-x}{x^x-1}$ en 0.

Développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$

Exercice 19 : Calcul

Calculer les développements asymptotiques suivants

$$\textbf{a. } \sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2} \quad \text{en } +\infty \text{ à 2 termes,} \qquad \textbf{b. } \ln\left(\sqrt{1+x}\right) \quad \text{en } +\infty \text{ à 2 termes.}$$

Développement asymptotique de suites

Exercice 20 : Équivalent

Donner un équivalent des expressions suivantes

$$\textbf{a. } \frac{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\tan\frac{\pi}{n}}, \qquad \textbf{b. } \frac{\ln(n^4+4)}{n+1}, \qquad \textbf{c. } 3+\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\frac{6}{n},$$

$$\textbf{d. } \ln(n+2)-\ln(n+1), \qquad \textbf{e. } \cos\frac{1}{2^n}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}, \qquad \textbf{f. } (n+1)^{\frac{1}{n+1}}-n^{\frac{1}{n}},$$

$$\textbf{g. } \mathrm{e}^{\tan\frac{\pi}{n}}-1, \qquad \textbf{h. } \frac{\ln(n^2+2)-\ln(n^2+1)}{n^{\frac{n+2}{n}}}, \qquad \textbf{i. } \sqrt{n}^n+n^{\sqrt{n}}+n^{\frac{n}{2}}.$$

Exercice 21 : Développement asymptotique d'une suite

On considère la suite définie par

$$u_0 \coloneqq 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq \sqrt{n+u_n}.$$

1. Montrer que
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \sqrt{n-1}\leqslant u_n\leqslant 2\sqrt{n}.$$
2. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, puis que
$$u_n=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).$$
3. Prouver enfin que
$$u_n=\sqrt{n}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 22 : La formule de Stirling

Le but de cet exercice est calculer de calculer un équivalent de $n!$. On considère la suite u définie par

$$\forall n\geqslant 0, \quad u_n \coloneqq \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n n!}.$$

1. Montrer que
$$\forall n\geqslant 1, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$
2. En déduire que
$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{12n^2}.$$
3. En déduire que la suite de terme général
$$S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$$
est monotone à partir d'un certain rang. Montrer qu'il existe un rang à partir duquel
$$\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)\leqslant\frac{1}{6k^2},$$
puis en déduire que (S_n) est convergente.
4. En déduire que la suite de terme général $\ln(u_n)$ est convergente.
5. En déduire l'existence d'un réel $a>0$ tel que
$$n!\underset{n\to+\infty}{\sim}a\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$
6. En utilisant les résultats de l'exercice sur les intégrales de Wallis (compléments d'analyse), montrer que $a=\sqrt{2\pi}$.