Suites

« Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent. »

– Johann Wolfgang von Goethe (1749–1832)

« M. Cauchy annonce que, pour se conformer au voeu du Conseil, il ne s'attachera plus à donner, comme il a fait jusqu'à présent, des démonstrations parfaitement rigoureuses. »

— Conseil d'instruction de l'École Polytechnique (1825)

Table des matières

1 Suite réelle et complexe

1.1 Définition

Définition 1.1

On appelle *suite numérique* toute famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels, ou de complexes, indexée par $\mathbb{N}$.

Remarque

⇨ Dans la suite de ce chapitre, ainsi que dans tous les chapitres d'analyse, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.2

- On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ *à partir d'un certain rang* lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
- On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est *asymptotique* lorsque, quelles que soient les suites (u_n) et (v_n) égales à partir d'un certain rang, $\mathcal{P}((u_n))$ est vrai si et seulement si $\mathcal{P}((v_n))$ est vrai.

Remarque

- Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}$ est asymptotique, il suffit de se donner deux suites (u_n) et (v_n) égales à partir d'un certain rang telles que $\mathcal{P}(u)$ est vrai et de montrer que $\mathcal{P}(v)$ est vrai.

Exercice 1

- La propriété « est nulle » est-elle asymptotique ? Montrer que la propriété « s'annule une infinité de fois » l'est.

1.2 Suite et relation d'ordre

Définition 1.3

On dit qu'une suite réelle (u_n) est

- *croissante* lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant u_{n+1}.$$
- *décroissante* lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$
- *monotone* lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
- *strictement croissante* lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}.$$
- *strictement décroissante* lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n.$$
- *strictement monotone* lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques

- Pour étudier la monotonie de la suite (u_n), il est souvent utile de simplifier $u_{n+1} - u_n$ afin de déterminer son signe. Si la suite (u_n) est à valeurs strictement positives, on peut comparer u_{n+1}/u_n à 1. Par exemple, si $a > 0$, la suite de terme général a^n est croissante si $a \geqslant 1$ et décroissante si $a \leqslant 1$.
- Pour étudier la monotonie d'une suite donnée par son terme général, on peut aussi l'écrire $u_n = f(n)$ et étudier la fonction f.
- Les suites constantes sont à la fois croissantes et décroissantes ; ce sont d'ailleurs les seules. Certaines suites ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Exercice 2

- Étudier la monotonie des suites de terme général
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}, \qquad \binom{2n}{n}, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Définition 1.4

On dit qu'une suite réelle (u_n) est

- *majorée* lorsque
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant M.$$
- *minorée* lorsque
$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant m.$$

Les propriétés « est majorée » et « est minorée » sont asymptotiques.

Définition 1.5

On dit qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est *bornée* lorsque
$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant M$$

La propriété « est bornée » est asymptotique.

Remarque

- Une combinaison linéaire de suites bornées est bornée. De même, le produit de deux suites bornées est bornée.

Proposition 1.6

Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

2 Notion de limite

2.1 Limite finie

Définition 2.1

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite et $l \in \mathbb{K}$. On dit que (u_n) *converge* vers l et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

La propriété « converge vers l » est asymptotique.

Remarques

⇨ Si $l \in \mathbb{K}$, la suite constante égale à l converge vers l.

⇨ Si (u_n) est une suite et $l \in \mathbb{K}$, alors (u_n) converge vers l si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

Cependant, conformément aux bonnes manières de l'analyse, nous éviterons le plus possible d'utiliser cette définition, car elle fait intervenir une inégalité stricte là où une inégalité large suffit.

Définition 2.2

— On dit qu'une suite (u_n) est *convergente* lorsqu'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Si tel est le cas, l est unique ; on l'appelle limite de la suite (u_n).

— Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est *divergente*.

Exercice 3

⇨ Soit (u_n) une suite convergente d'entiers. Montrer qu'elle est constante à partir d'un certain rang. En déduire que la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Proposition 2.3

Toute suite convergente est bornée.

Proposition 2.4

Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{K}$. Alors

$$\overline{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \overline{l} \quad \text{et} \quad |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|.$$

Proposition 2.5

Soit (u_n) et (v_n) des suites convergeant respectivement vers l_1 et $l_2 \in \mathbb{K}$.

— Si $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$, alors

$$\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda l_1 + \mu l_2.$$

— De plus

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2.$$

— Enfin, si $l_1 \neq 0$, la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l_1}.$$

Exercices 4

⇨ Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle positive telle que la suite de terme général $u_n/(1+u_n)$ converge vers 0. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

Proposition 2.6

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{C}$. Alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\operatorname{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Re} l \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Im} l\right].$$

2.2 Limite infinie

Définition 2.7

Soit (u_n) une suite réelle.

— On dit que u_n *tend vers* $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant m.$$

Si tel est le cas, on note

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

— On dit que u_n *tend vers* $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant M.$$

Si tel est le cas, on note

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

Ces propriétés sont asymptotiques. De plus u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $-u_n$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $n + \alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 2.8

Si u_n admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique ; on l'appelle limite de la suite (u_n) et on la note

$$\lim_{n\to\infty} u_n.$$

Remarque

⇨ Une suite qui tend vers $+\infty$ est divergente. On dit aussi qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 6

⇨ Une suite non majorée diverge-t-elle toujours vers $+\infty$? Une suite divergeant vers $+\infty$ est-elle toujours croissante à partir d'un certain rang ?

Proposition 2.9

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

— Si u_n tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée, alors

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

— Si u_n tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée par $m > 0$, alors

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 2.10

Soit (u_n) une suite réelle.

— Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors il existe un rang à partir duquel $u_n > 0$ et

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

— Si (u_n) converge vers 0 et est strictement positive, alors

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

2.3 Limite et relation d'ordre

Proposition 2.11

Soit (u_n) une suite réelle admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite.
— Si (u_n) est majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors $l \leqslant M$.
— Si (u_n) est minorée par $m \in \mathbb{R}$, alors $l \geqslant m$.

Remarques

⇨ Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergeant respectivement vers l_u et $l_v \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$$

alors $l_u \leqslant l_v$. On dit que les inégalités larges passent à la limite.

⇨ Cependant, les inégalités strictes ne passent pas à la limite.

Proposition 2.12

Soit (u_n) une suite réelle admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite.
— Si M est un réel tel que $l < M$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant M.$$

— Si m est un réel tel que $l > m$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant m.$$

Théorème 2.13: Théorème des gendarmes

Soit (a_n), (b_n) et (u_n) des suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant u_n \leqslant b_n.$$

On suppose que a_n et b_n admettent la même limite finie $l \in \mathbb{R}$. Alors

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exercices 7

⇨ Donner la limite éventuelle de la suite de terme général $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$.

⇨ Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. Que dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Proposition 2.14

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

— si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
— si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Exercices 8

⇨ Donner la limite éventuelle de la suite de terme général $n + \sin n$.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle telle que la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge vers $\alpha > 0$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Proposition 2.15

Soit (u_n) une suite, $l \in \mathbb{K}$ et (v_n) une suite réelle positive telle que
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - l| \leqslant v_n$,
- $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Exercice 9

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite de terme général
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\alpha}.$$

2.4 Théorèmes usuels et limites usuelles

Proposition 2.16

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ayant pour limites respectives l_1 et $l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.
- Si $l_1 + l_2$ n'est pas une forme indéterminée
$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 + l_2.$$
- Si $l_1 l_2$ n'est pas une forme indéterminée
$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2.$$
- Si $1/l_1$ n'est pas une forme indéterminée
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l_1}.$$

Proposition 2.17

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors
$$\frac{1}{n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 2.18

Soit ω un réel positif.
- Si $\omega > 1$, alors $\omega^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $\omega < 1$, alors $\omega^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Proposition 2.19

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$
- Si $\omega < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $\omega > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 10

⇨ Déterminer la limite éventuelle des suites de terme général
$$\frac{\mathrm{e}^n}{n!}, \qquad \frac{n}{(1+\mathrm{i})^n}.$$

Proposition 2.20

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Si (u_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ admettant a pour limite, alors

$$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

Exercice 11

⇨ Déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

2.5 Suite extraite

Définition 2.21

On appelle *extractrice* toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Remarque

⇨ Les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_1(n) := n + 1, \qquad \varphi_2(n) := 2n, \qquad \varphi_3(n) := 2n + 1$$

sont des extractrices.

Proposition 2.22

Si φ est une extractrice, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$

Définition 2.23

Soit (u_n) une suite. On appelle *suite extraite* (ou *sous-suite*) de (u_n) toute suite du type $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où φ est une extractrice.

Proposition 2.24

Si (u_n) est une suite admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) pour limite, toute sous-suite de (u_n) tend vers l.

Remarque

⇨ Pour montrer qu'une suite (u_n) n'admet pas de limite, il suffit de trouver deux extractrices φ_1 et φ_2 telles que les suites de terme général $u_{\varphi_1(n)}$ et $u_{\varphi_2(n)}$ ont vers des limites différentes.

Exercices 12

⇨ Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} + (-1)^n$ n'admet pas de limite.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'on peut en extraire une suite divergeant vers $+\infty$.

Proposition 2.25

Soit (u_n) une suite et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que

$$u_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \quad \text{et} \quad u_{2n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

Alors

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l.$$

3 Propriétés de $\mathbb{R}$

3.1 Voisinage

Définition 3.1

— Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| \leqslant \varepsilon\} = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]\,.$$

— On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de $+\infty$ lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{V} = [m, +\infty[\,.$$

— On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* de $-\infty$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{V} =]-\infty, M]\,.$$

— Soit $a \in \mathbb{C}$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}$ est un *voisinage* de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant \varepsilon\}.$$

Remarque

⇨ La notion de voisinage permet d'unifier la notion de limite. Si (u_n) est une suite réelle et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$$

si et seulement si, quel que soit le voisinage $\mathcal{V}$ de l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \in \mathcal{V}$.

Proposition 3.2

L'intersection d'un nombre fini de voisinages de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est un voisinage.

3.2 Densité

Définition 3.3

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$ lorsque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad |x - a| \leqslant \varepsilon.$$

Remarques

⇨ Autrement dit, A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si, quels que soient $x \in \mathbb{R}$ et le voisinage $\mathcal{V}$ de x, $\mathcal{V} \cap A \neq \varnothing$.

⇨ Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x \leqslant a \leqslant y$.

Proposition 3.4

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Proposition 3.5

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque

⇨ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3.3 Propriété de la borne supérieure

Définition 3.6

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A admet une *borne supérieure* lorsque l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément. Si tel est le cas, on le note $\sup A$.

Remarques

- Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$ admettent b pour borne supérieure.
- Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, alors elle admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$. Cependant, il est possible que A admette une borne supérieure qui n'appartienne pas à A ; dans ce cas, A n'admet pas de plus grand élément.
- Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, alors elle est non vide et majorée.

Proposition 3.7

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne supérieure de A si et seulement si

— α est un majorant de A
$$\forall a \in A, \quad a \leqslant \alpha.$$
— α est le plus petit des majorants de A
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a \geqslant \alpha - \varepsilon.$$

Remarques

- Si A est une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, dire que α est un majorant de A s'écrit : $\forall a \in A \quad a \leqslant \alpha$. Par contre, pour montrer (ou exploiter le fait) que α est le plus petit des majorants de A, deux phrases équivalentes s'offrent à nous.
$$\forall \beta \in \mathbb{R}, \quad [\forall a \in A, \quad a \leqslant \beta] \quad \Longrightarrow \quad \alpha \leqslant \beta$$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a \geqslant \alpha - \varepsilon.$$
Nous emploierons le plus souvent la seconde.
- Pour exploiter le fait que α est le plus petit des majorants de A, on peut remplacer l'inégalité $a \geqslant \alpha - \varepsilon$ par une inégalité stricte
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a > \alpha - \varepsilon.$$

Proposition 3.8

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne supérieure de A si et seulement si c'est un majorant de A et qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers α.

Exercice 13

- Montrer que $A := \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne supérieure que l'on calculera.

Théorème 3.9

Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure si et seulement si elle est non vide et majorée.

Exercice 14

- Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On suppose que A est non vide et que B est majorée. Comparer $\sup A$ et $\sup B$.

Définition 3.10

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A admet une *borne inférieure* lorsque l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément. Si tel est le cas, on le note $\inf A$.

Proposition 3.11

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne inférieure de A si et seulement si

— α est un minorant de A
$$\forall a \in A, \quad a \geqslant \alpha.$$

— α est le plus grand des minorants de A

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A, \quad a \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

Proposition 3.12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est la borne inférieure de A si et seulement si c'est un minorant de A et qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers α.

Exercice 15

⇨ Montrer que $A := \left\{\frac{4}{n} + n : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne inférieure que l'on calculera.

Proposition 3.13

Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure si et seulement si elle est non vide et minorée.

Définition 3.14

On dit qu'une partie C de $\mathbb{R}$ est *convexe* lorsque

$$\forall a, b \in C, \quad a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad [a, b] \subset C.$$

Théorème 3.15

Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Remarque

⇨ On en déduit que l'intersection d'une famille d'intervalles est un intervalle.

4 Suite monotone

4.1 Suite monotone

Théorème 4.1: Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante majorée est convergente.

Remarque

⇨ Si (u_n) est croissante et admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l.$$

De plus, si (u_n) est strictement croissante, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < l.$$

Exercices 16

⇨ Soit $\alpha > 1$ et (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Montrer que pour tout $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

En déduire la convergence de la suite (u_n).

⇨ La limite de l'exemple précédent est notée $\zeta(\alpha)$. On définit ainsi une fonction ζ de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, appelée fonction zéta de Riemann. Montrer que ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Proposition 4.2

Soit (u_n) une suite croissante.
- — Si elle est majorée, alors elle est convergente.
- — Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 17

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Montrer que $u_{2n} - u_n$ est minoré par un réel $\alpha > 0$. En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Proposition 4.3

Toute suite décroissante minorée est convergente.

Proposition 4.4

Soit (u_n) une suite décroissante.
- — Si elle est minorée, alors elle est convergente.
- — Sinon, elle diverge vers $-\infty$.

4.2 Étude des suites définies par $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$

Remarques

⇨ Lorsqu'on étudie une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$, on procède comme suit.
- — *Étude de f et tracé de son graphe*
  On commencera par tracer le graphe de f en prenant soin de placer correctement ce graphe par rapport à la droite d'équation $y = x$. En pratique, on étudiera les variations de f, ses limites aux bornes du domaine de définition, ainsi que le signe de $\varphi(x) \coloneqq f(x) - x$.
- — *Tracé des escaliers et conjectures*
  Dans le cas où f est croissante, un dessin de l'*escalier* des premiers termes de la suite (u_n) permet d'établir une conjecture concernant son comportement asymptotique en fonction de α.
- — *Recherche d'un intervalle stable par f*
  On cherche ensuite un intervalle I de $\mathbb{R}$, stable par f, tel que $u_0 \in I$. On en déduit que la relation de récurrence définit bien une suite (u_n) et que
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$
- — *Démonstration des résultats annoncés*
  Si φ est de signe constant sur I, alors (u_n) est monotone. C'est le signe de φ qui donne le sens de variation de (u_n). Elle admet donc une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ qui est soit une extrémité de I, soit un élément de I. Dans le cas où $l \in I$ et f est continue en l, on a $f(l) = l$.

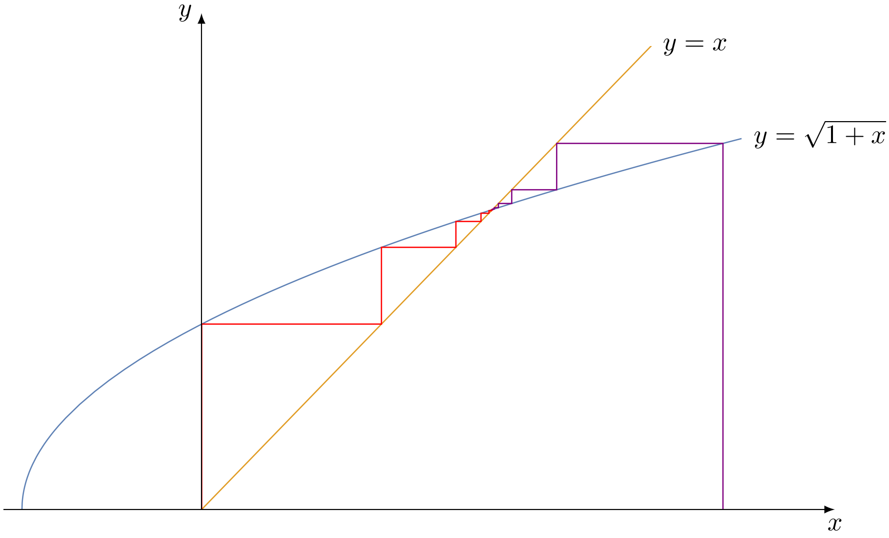
⇨ Remarquons que la croissance seule de f permet de montrer la monotonie de (u_n).

Exercices 18

⇨ Soit $\alpha \geqslant 0$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 \coloneqq \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq \sqrt{1 + u_n}.$$

Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).



⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 \coloneqq \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq \frac{u_n^2 + 2}{3}.$$

Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

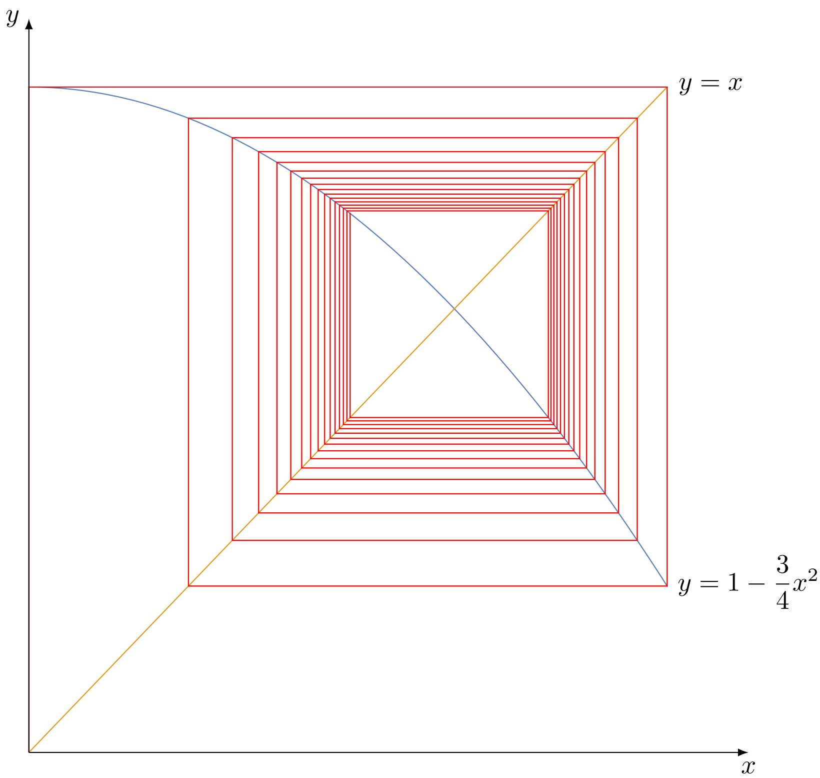
Remarque

⇨ Si f est décroissante, on étudie les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Ces suites vérifient une relation de récurrence faisant intervenir $f \circ f$. On commence par étudier la suite (u_{2n}). Comme f est décroissante, $f \circ f$ est croissante, et on est ramené au cas précédent. Puis, en remarquant que $u_{2n+1} = f(u_{2n})$, on en déduit la limite, si elle existe, de (u_{2n+1}). Si ces deux suites admettent la même limite $l \in \mathbb{R}$, alors (u_n) converge vers l. Dans le cas contraire, la suite (u_n) est divergente.

Exercice 19

⇨ Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \coloneqq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \coloneqq 1 - \frac{3}{4}u_n^2.$$



4.3 Suites adjacentes

Définition 4.5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* lorsque

- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$,
- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante,
- $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque

⇨ Si deux suites (u_n) et (v_n) vérifient les deux derniers points, alors elles vérifient le premier point. En théorie il est donc inutile de le vérifier, mais l'usage veut qu'on le fasse.

Proposition 4.6

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n.$$

Exercice 20

⇨ Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \text{et} \quad v_n := \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

sont adjacentes. En utilisant une comparaison avec des intégrales, montrer qu'elles convergent vers $\ln 2$.

4.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème 4.7: Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Exercice 21

⇨ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (p_n) une suite d'entiers relatifs et (q_n) une suite d'entiers naturels non nuls tels que

$$\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x.$$

Montrer que $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.