# Séries

## Table des matières



Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Série

### 1.1 Série

**Définition 1.1**

Soit $(u_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle *série de terme général* $u_n$ et on note $\sum u_n$ la suite $(S_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Le terme $S_n$ est appelé *somme partielle d'indice* $n$ de la série.

**Définition 1.2**

On dit qu'une série $\sum u_n$ *converge* lorsque la suite de ses sommes partielles converge. Si c'est le cas, sa limite $l \in \mathbb{K}$ est appelée *somme* de la série. On la note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Dans le cas contraire, on dit qu'elle *diverge*.

**Remarques**

- Si on change un nombre fini de termes de la suite $(u_n)$, on ne change pas la nature de la série $\sum u_n$. Par contre, si elle converge, cela peut changer sa somme.
- Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

**Exercice 1**

- Montrer que la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

converge et calculer sa somme.

**Définition 1.3**

Soit $\sum u_n$ une série convergente. On définit la suite $(R_n)$ par

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n &:= \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.\end{aligned}$$

Le terme $R_n$ est appelé *reste d'indice* $n$ de la série.

**Remarque**

⇨ La suite $(R_n)$ des restes converge vers 0.

**Proposition 1.4**

Soit $\sum u_n$ une série. Si elle est convergente, alors

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Par contraposée, si la suite $(u_n)$ ne converge pas vers 0, la série $\sum u_n$ est divergente. On dit qu'elle diverge *grossièrement*.

**Remarque**

⇨ Il est possible qu'une série diverge sans diverger grossièrement. Par exemple, si $(u_n)$ est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

alors, la série associée diverge alors que la suite $(u_n)$ converge vers 0.

**Proposition 1.5**

La suite $(u_n)$ et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.

**Remarque**

⇨ Si $(u_n)$ est une suite, la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ est appelée *dérivée* de la suite $(u_n)$. Par sommation télescopique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

L'étude de la suite $(u_n)$ se ramène donc à l'étude de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

**Proposition 1.6**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors, la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

**Remarques**

⇨ Attention, il est possible que la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ soit convergente sans que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ le soient. Avant d'écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

il faudra donc toujours vérifier que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient convergentes. Un tel oubli pourrait conduire à écrire des horreurs comme

$$\begin{aligned}0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + (-1)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1).\end{aligned}$$

La dernière expression n'a en effet aucun sens car les deux séries sont grossièrement divergentes.

- Si $\sum u_n$ est convergente et $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum(u_n + v_n)$ est divergente.

**Proposition 1.7**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la série
$$\sum z^n$$
converge si et seulement si $|z| < 1$. Si tel est le cas, sa somme est
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

**Exercice 2**

- Soit $(F_n)$ la suite de Fibonacci définie par
$$F_0 \coloneqq 0, \quad F_1 \coloneqq 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} \coloneqq F_{n+1} + F_n.$$
Démontrer l'existence puis calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{F_n}{2^n}.$$

**Proposition 1.8**

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la série
$$\sum \frac{z^n}{n!}$$
est convergente et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

**Exercice 3**

- Établir l'existence et calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!}.$$

## 1.2 Série à termes positifs

**Définition 1.9**

On dit qu'une série réelle $\sum u_n$ est à termes positifs lorsque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0.$$

**Remarques**

- La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante. Réciproquement, si $(u_n)$ est une suite croissante, sa suite dérivée $(u_{n+1} - u_n)$ est une suite à termes positifs.
- Puisque la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, les théorèmes de convergence sur les séries à termes positifs s'appliquent même si la série est à termes positifs à partir d'un certain rang. Bien entendu, des théorèmes similaires aux théorèmes que nous allons énoncer existent pour les séries à termes négatifs. Les théorèmes que nous allons énoncer dans cette section sont donc utiles pour étudier les séries de signe constant à partir d'un certain rang.

**Proposition 1.10**

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

**Proposition 1.11: Série de Riemann**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, la série

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

**Remarque**

⇨ En particulier, la série harmonique $(H_n)$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

diverge. Une comparaison série intégrale permet de montrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

**Exercices 4**

⇨ Montrer que la série

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

converge et donner un équivalent de son reste.

⇨ Prouver la divergence et donner un équivalent des sommes partielles de la série

$$\sum \frac{1}{n \ln n}.$$

**Proposition 1.12**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n.$$

— Si la série $\sum v_n$ converge, alors il en est de même pour $\sum u_n$.
— Si la série $\sum u_n$ diverge, alors il en est de même pour $\sum v_n$.

**Exercices 5**

⇨ Donner la nature des séries

$$\sum \frac{\sin^2 n}{n^3}, \qquad \sum \frac{\cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sqrt{n}}.$$

⇨ Soit $r \in \mathbb{R}_+$. Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{r^n}{n}$$

en fonction de $r$.

**Proposition 1.13**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n)$$

et que la série $\sum v_n$ est convergente. Alors la série $\sum u_n$ est convergente.

**Remarque**

⇨ En particulier, pour des séries à termes positifs, si

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$$

et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est convergente.

**Exercice 6**

⇨ Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}.$$

**Proposition 1.14**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles. On suppose que $\sum v_n$ est à termes positifs et que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n.$$

Alors la série $\sum u_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang et les deux séries sont de même nature.

**Exercices 7**

⇨ Établir la nature des séries suivantes

$$\sum \frac{1}{3n+1}, \qquad \sum \tan\left(\frac{1}{n}\right), \qquad \sum \frac{1}{2^n - n}.$$

⇨ Donner la nature des séries

$$\sum \ln\left(\tan \frac{\pi n}{4n+1}\right), \qquad \sum \left[(\operatorname{th} n)^{\frac{1}{n}} - 1\right].$$

⇨ Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1).$$

La constante $\gamma \approx 0.577$ est appelée constante d'Euler.

## 1.3 Série absolument convergente

**Définition 1.15**

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathbb{K}$. Si la série à termes positifs

$$\sum |u_n|$$

converge, alors la série $\sum u_n$ converge. On dit dans ce cas que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente.*

**Remarque**

⇨ Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est appelée série *semi-convergente.*

**Exercice 8**

⇨ Montrer que la série

$$\sum \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$$

est convergente.

**Proposition 1.16**

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\sum v_n$ une série à termes positifs telle que

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n).$$

Si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

**Remarque**

⇨ En particulier, si $(v_n)$ est une suite positive, si

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(v_n)$$

et si $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

**Proposition 1.17: Règle de d'Alembert**

Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de $\mathbb{K}$ ne s'annulant pas. On suppose que

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Alors

— Si $\omega < 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.
— Si $\omega > 1$, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.

**Remarque**

⇨ Si $\omega = 1$, la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure. Dans ce cas, il peut être intéressant d'effectuer une comparaison avec une série de Riemann.

**Exercices 9**

⇨ Déterminer la nature de la série
$$\sum \frac{n^4}{3^n}.$$
⇨ Soit $z \in \mathbb{C}$. Retrouver le fait que la série
$$\sum \frac{z^n}{n!}$$
est convergente.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ pour que la série
$$\sum \left[\frac{n^2+2}{n^2+2n+1} - \left(a + \frac{b}{n}\right)\right]$$
soit convergente.

## 1.4 Série semi-convergente

**Théorème 1.18: Théorème des séries alternées**

Soit $(u_n)$ une suite à termes positifs, décroissante et convergeant vers 0. Alors la série
$$\sum (-1)^n u_n$$
converge. De plus, si $(R_n)$ est la suite des restes définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n \coloneqq \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$$
alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

**Remarques**

⇨ La série
$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$
est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

⇨ Les séries alternées permettent de construire des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ qui sont équivalentes en $+\infty$ mais qui ne sont pas de même nature. Par exemple, si on définit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n \coloneqq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$
alors $(u_n)$ et $(v_n)$ sont équivalentes en $+\infty$ bien que $\sum u_n$ soit convergente et que $\sum v_n$ soit divergente.

**Exercices 10**

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ pour que la série
$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$
soit convergente.

⇨ Soit $\alpha > 0$. Discuter, selon $\alpha$, de la nature de la série
$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}.$$