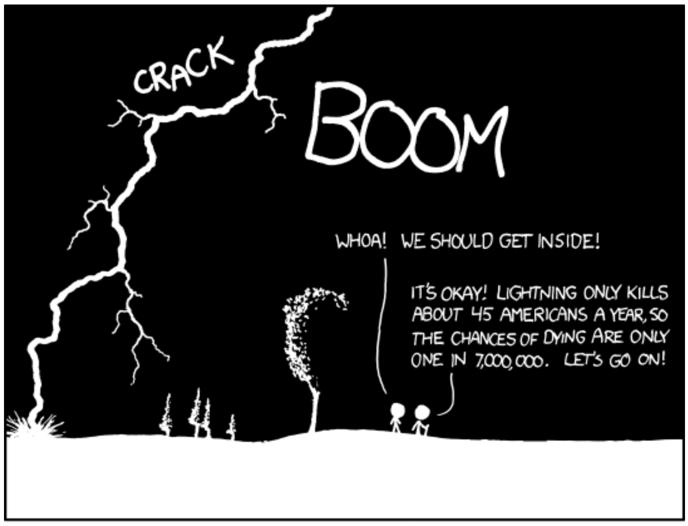
Probabilités

« Il y a tellement de gens qui trouvent à travers le monde la seule femme qu'ils puissent aimer, que l'énorme fréquence de ces rencontres me rend sceptique, moi qui ai un certain respect du calcul des probabilités. »

— Tristan Bernard (1866–1947)

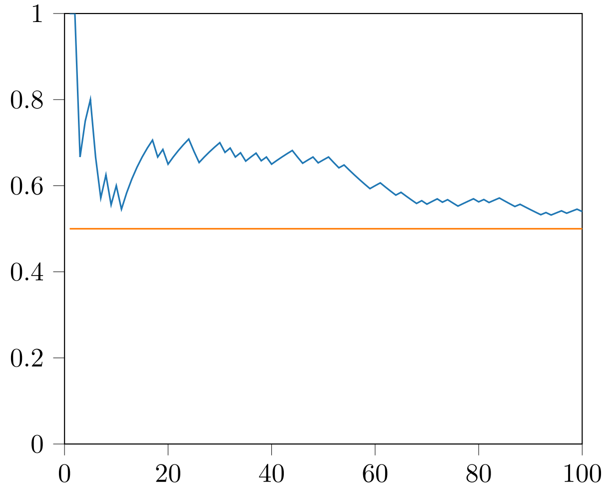


THE ANNUAL DEATH RATE AMONG PEOPLE WHO KNOW THAT STATISTIC IS ONE IN SIX.

Table des matières

1 Espace probabilisé

La théorie des probabilités est la modélisation mathématique des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude. Considérons par exemple le jeu de « pile ou face ». Avant d'effectuer un lancer, nous savons que le résultat de cette expérience sera soit pile, soit face. Il est impossible de prévoir le résultat d'un unique lancer, mais si nous effectuons n lancers et que nous comptons le nombre n_P de fois où on a obtenu pile, on constate que la proportion n_P/n tend vers $1/2$ lorsque n tend vers l'infini.



En mathématiques, nous modélisons cette expérience en disant que l'univers des possibles est un ensemble $\Omega \coloneqq \{P, F\}$ formé de deux éléments et que la probabilité de l'évènement $A \coloneqq \{P\}$ est $1/2$, ce que l'on note

$$\mathbb{P}(\{P\}) = \frac{1}{2}.$$

Puisque le nombre n_F de fois où on a obtenu face vérifie $n_P + n_F = n$, on en déduit que la probabilité d'obtenir face est aussi de $1/2$, ce que l'on note de même $\mathbb{P}(\{F\}) = 1/2$.

Considérons maintenant un autre jeu de hasard : le lancer d'un dé à 6 faces. Dans ce cas, l'univers des possibles est $\Omega \coloneqq [\![1, 6]\!]$. On constate que quel que soit $\omega \in \Omega$, si on lance le dé n fois et qu'on compte le nombre n_ω de fois où on a obtenu ω, la proportion n_ω/n tend vers $1/6$. On écrira

$$\forall \omega \in [\![1, 6]\!], \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{6}.$$

Si l'on s'intéresse au nombre n_P de fois où on a obtenu un nombre pair, c'est-à-dire au nombre de fois où on a obtenu 2, 4 ou 6, nous dirons que nous nous intéressons à l'évènement $A \coloneqq \{2, 4, 6\}$. Bien entendu

$$\frac{n_P}{n} = \frac{n_2 + n_4 + n_6}{n} = \frac{n_2}{n} + \frac{n_4}{n} + \frac{n_6}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

On écrira

$$\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}.$$

Nous remarquons que sur ces deux exemples, l'univers Ω est fini et que, quelle que soit la partie A de Ω, on a

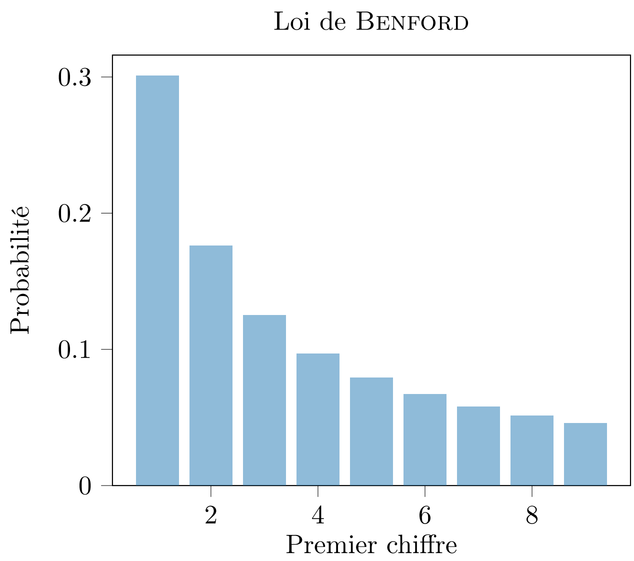
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}.$$

Nous dirons que la probabilité $\mathbb{P}$ est uniforme sur Ω.

Cependant, les probabilités ne sont pas toujours uniformes. On considère par exemple l'expérience qui consiste à avoir 2 enfants. Si on s'intéresse au sexe des enfants, il y a trois possibilités : on peut avoir deux filles, deux garçons ou une fille et un garçon. Nous modélisons cela en disant que l'univers des possibles est $\Omega \coloneqq \{F, G, D\}$. L'expérience montre que la probabilité d'avoir deux filles est de $1/4$, celle d'avoir deux garçons est de $1/4$ et celle d'avoir une fille et un garçon est de $1/2$. Nous avons donc un exemple simple où la probabilité n'est pas uniforme.

En 1881, l'astronome Simon Newcomb se rend compte que les livres de tables de logarithmes sont plus abimés à certaines pages qu'à d'autres. Sa découverte suggère que les personnes ayant besoin de faire des applications numériques sont plus souvent confrontées à des nombres commençant par un 1, comme 1491 ou 1.602×10^{-19}, que par un 9, comme 987 ou 9.81. Soixante ans plus tard, Frank Benford, après avoir répertorié un très grand nombre de données, dont les longueurs des fleuves et les populations des villes, fait le même constat. Ici, l'univers des possibles est $\Omega \coloneqq [\![1, 9]\!]$ et Benford postule que

$$\forall \omega \in [\![1, 9]\!], \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \log_{10}\left(1 + \frac{1}{\omega}\right).$$



On vérifie que

$$\begin{aligned}\sum_{\omega=1}^{9} \mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{\omega=1}^{9} \log_{10}\left(1+\frac{1}{\omega}\right) = \sum_{\omega=1}^{9} [\log_{10}(\omega+1) - \log_{10}(\omega)] \\ &= \log_{10}(10) - \log_{10}(1) = 1\end{aligned}$$

comme attendu pour une probabilité.

1.1 Espace probabilisé

Définition 1.1

Étant donné une expérience aléatoire, on appelle *univers des possibles* ou simplement *univers* tout ensemble fini Ω où chaque élément $\omega \in \Omega$ représente une *réalisation* de l'expérience.

Exemples

- *Série de Pile ou Face.* Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter n fois une pièce. Dans ce cas, l'univers des possibles est $\Omega := \{P, F\}^n$, la lettre P représentant le résultat pile et la lettre F représentant le résultat face. Par exemple, si $n = 3$, $\omega := (P, P, F)$ représente la réalisation de l'expérience où les deux premiers lancers donnent pile et le dernier lancer donne face.
- *Répartition de n boules discernables dans p urnes discernables.* Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On considère l'expérience qui consiste à répartir de manière aléatoire n boules discernables dans p urnes discernables. On choisit de numéroter les boules de 1 à n et les urnes de 1 à p. L'univers des possibles est donc $\Omega_D := [\![1, p]\!]^n$ et une réalisation $\omega \in \Omega$ de l'expérience est un n-uplet $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\omega_i \in [\![1, p]\!]$ est le numéro de l'urne dans laquelle on a placé la boule i.
- *Répartition de n boules indiscernables dans p urnes discernables.* Soit $n, p \in \mathbb{N}$. On considère l'expérience qui consiste à répartir de manière aléatoire n boules indiscernables dans p urnes discernables. Une réalisation est caractérisée par le nombre de boules $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{N}$ que contient chaque urne. Comme on sait qu'il y a au total n boules, l'univers des possibles est donc

$$\Omega_I := \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \mid x_1 + \cdots + x_p = n\}.$$

Remarque

- En première année, l'univers des possibles sera toujours un ensemble fini. Cette restriction nous empêchera de modéliser certaines expériences comme jouer à pile ou face jusqu'à obtenir pile. La théorie des probabilités sur un univers infini est plus délicate. C'est pourquoi vous ne l'aborderez qu'en seconde année.

Définition 1.2

Soit Ω l'univers des possibles.

- On appelle *évènement* toute partie de Ω. L'évènement Ω est appelé *évènement certain* et l'évènement $\varnothing$ est appelé *évènement impossible.*
- On dit que deux évènements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont *disjoints*, ou *incompatibles*, lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Remarques

- On dit que les évènements $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont incompatibles lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing.$$

- On dit qu'un évènement A est *élémentaire* lorsqu'il ne contient qu'un résultat observable, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $A = \{\omega\}$.
- Si A et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont des évènements, on appelle
  — évènement « A et B » l'évènement $A \cap B$.
  — évènement « A ou B » l'évènement $A \cup B$.
  — évènement « contraire de A » l'évènement $\bar{A} = \Omega \setminus A$.

Exercice 1

- On considère l'expérience consistant à jeter n fois une pièce. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on considère l'évènement $F_k :=$ « Le résultat du k-ième lancer est face ». Exprimer, en fonction des F_k, les évènements suivants :
  — $A :=$ « On n'obtient jamais pile au cours des n lancers ».
  — $B :=$ « On obtient pile au moins une fois au cours des n lancers ».
  — $C :=$ « On obtient deux faces consécutifs au cours des n lancers ».

Définition 1.3

Soit Ω l'univers des possibles. On dit que la famille d'évènements $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ forme un *système complet d'évènements* lorsque c'est une partition de Ω, c'est-à-dire lorsque

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad \text{et} \qquad \left[\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing\right].$$

Définition 1.4

On appelle *loi de probabilité*, *mesure de probabilité* ou plus simplement *probabilité* sur un univers Ω toute application

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(A) \end{array}$$

telle que
  — $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  — $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad A \cap B = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$

Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé *espace probabilisé*.

Remarque

- On dit que deux évènements A et B sont *équiprobables* lorsque $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

Définition 1.5

Soit Ω un ensemble fini non vide. On appelle *probabilité uniforme* sur Ω l'application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}.$$

Remarques

- Lorsque Ω est muni d'une loi uniforme, les calculs de probabilité se ramènent à des problèmes de dénombrement.
- Pour deux des trois exemples d'expérience aléatoire que nous avons donné en début de cours, la probabilité « naturelle » est la probabilité uniforme.
  — *Série de Pile ou Face* : Si on considère l'expérience aléatoire qui consiste à jeter n fois une pièce équilibrée, c'est la probabilité uniforme qui est naturelle sur l'univers $\Omega := \{P, F\}^n$. Nous montrerons plus tard que cela revient à supposer que les résultats de chaque lancer ont autant de chance de donner pile que face, et que les lancers sont indépendants.
  — *Répartition de n boules discernables dans p urnes discernables* : Si l'on souhaite répartir n boules discernables dans p urnes discernables, c'est encore la probabilité uniforme qui est naturelle sur $\Omega_D := [\![1, p]\!]^n$. Nous verrons que cela revient à supposer que chaque boule est placée de manière équiprobable dans les différentes urnes et que ces répartitions sont indépendantes les unes des autres.

Dans la suite de ce cours, $(\Omega, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé.

Proposition 1.6

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varnothing) = 0, &\qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1, \\ \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), &\qquad \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \\ \forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), &\qquad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

Proposition 1.7

Une probabilité est une fonction *croissante*. Autrement dit

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), \quad A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B).$$

Proposition 1.8

Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ une famille d'évènements incompatibles. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques

⇨ Si $A_1, \dots, A_n$ est une famille d'évènements incompatibles, la réunion des A_i est parfois notée

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i.$$

⇨ Si $A_1, \dots, A_n$ sont quelconques, on a seulement

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

On dit que $\mathbb{P}$ est *sous-additive*.

Exercices 2

⇨ Une urne contient 20 boules, numérotées de 1 à 20 : 5 boules sont blanches, 5 sont rouges et 10 sont noires. On tire successivement 3 boules, avec remise à chaque tirage. Si on munit Ω de la probabilité uniforme, calculer la probabilité que le tirage soit :
— unicolore.
— tricolore.
— bicolore.

⇨ Une urne contient 8 boules, numérotées de 1 à 8 : 3 boules sont blanches et 5 sont noires. On en tire simultanément 4 boules. Si on munit Ω de la probabilité uniforme, avec quelle probabilité n'a-t-on tiré que des boules noires ?

Proposition 1.9: Formule du crible

Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ une famille d'évènements. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

Remarque

⇨ Par exemple, pour $n = 3$, la formule du crible s'écrit

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup A_3\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - [\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)] + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Définition 1.10

— On appelle *distribution de probabilité* sur Ω toute famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs telle que

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

— Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω, on appelle *distribution de probabilité* de $\mathbb{P}$ la famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad p_\omega := \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

C'est une distribution de probabilité sur Ω.

Remarque

⇨ Si $\mathbb{P}$ désigne la probabilité uniforme sur l'univers Ω de cardinal n, alors quel que soit $\omega \in \Omega$, $p_\omega = 1/n$.

Exercice 3

⇨ Sur l'univers $\Omega := [\![0, n]\!]$, on définit la famille $(p_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ par

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,, \quad p_k := \alpha\binom{n}{k}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer α pour que $(p_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ soit une distribution de probabilité.

Proposition 1.11

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ la distribution de probabilité de $\mathbb{P}$. Alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} p_\omega.$$

Remarques

⇨ Une probabilité est donc entièrement déterminée par sa distribution de probabilité.

⇨ Une probabilité est donc uniforme si et seulement si tous les évènements élémentaires sont équiprobables. Une erreur très classique en probabilités est de croire que la mesure de probabilité « naturelle » sur un univers est toujours la probabilité uniforme. Ce n'est pas toujours le cas. Cependant, lorsque ça l'est, un argument de symétrie permet souvent de s'en convaincre. Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, les symétries du dé font que les valeurs obtenues sont équiprobables. La mesure de probabilité « naturelle » sur $\Omega := [\![1, 6]\!]$ est donc la probabilité uniforme.

Exercice 4

⇨ On lance un dé pipé à 6 faces qui donne « 1 » avec la probabilité $1/4$ et les autres faces avec une même probabilité p. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ?

Proposition 1.12

Soit $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une distribution de probabilité sur l'univers Ω. Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega.$$

1.2 Variable aléatoire

Définition 1.13

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle *variable aléatoire* à valeurs dans E toute application $X : \Omega \to E$.

Remarque

⇨ On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ est réelle lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 1.14

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Alors, pour toute partie A de E, on définit l'évènement

$$(X \in A) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$

Remarques

⇨ Si $x \in E$, l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est noté $(X = x)$.

⇨ Si X est une variable aléatoire réelle et $a, b \in \mathbb{R}$, l'évènement $\{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$ est noté $(a \leqslant X \leqslant b)$.

⇨ L'évènement $(X \in A)$ est aussi noté $\{X \in A\}$ ou $[X \in A]$. La probabilité d'un tel évènement est notée $\mathbb{P}(X \in A)$.

Proposition 1.15

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors

$$(X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B), \qquad (X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B),$$
$$(X \in \bar{A}) = \overline{(X \in A)}.$$

Exercice 5

⇨ Soit $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \leqslant n) - \mathbb{P}(X \leqslant n - 1).$$

Définition 1.16

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_X : & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}\left(X \in A\right) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée *loi* de X.

Remarques

⇨ La loi de X est entièrement déterminée par sa distribution de probabilité $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

⇨ Si $x \in E$ n'appartient pas à $X(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

⇨ En pratique, lorsqu'il nous sera demandé de déterminer la loi d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$, on commencera par déterminer un ensemble fini E' tel que $X(\Omega) \subset E'$ puis on calculera $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in E'$.

⇨ Si $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ est un espace probabilisé, Ω_2 est un ensemble fini et F est une application de Ω_1 dans Ω_2, alors

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_2 : & \mathcal{P}(\Omega_2) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}_1\left(F \in A\right) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω_2, appelée *mesure image* de $\mathbb{P}_1$ par F.

⇨ En reprenant les notations utilisées dans les exemples de répartition de n boules discernables/indiscernables dans p urnes discernables donnés plus haut, on considère la fonction d'oubli $F : \Omega_D \to \Omega_I$. À une répartition de boules numérotées et donc discernables, elle associe la répartition des boules indiscernables, où on a effacé le numéro des boules. Autrement dit, si $\omega := (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_D$, alors $F(\omega) = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_I$ où

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad x_j = \mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid \omega_i = j\}.$$

La mesure de probabilité naturelle sur Ω_I est la mesure image par F de la probabilité uniforme sur Ω_D.

Exercice 6

⇨ On lance successivement deux dés à 6 faces. On modélise cette expérience en choisissant $\Omega := [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme. On note $A_1 : \Omega \to \mathbb{N}$ le résultat du premier dé et $A_2 : \Omega \to \mathbb{N}$ le résultat du second dé. Déterminer les lois de A_1, A_2 ainsi que la loi de la variable aléatoire $A_1 + A_2 : \Omega \to \mathbb{N}$ donnant la somme des deux nombres obtenus.

Proposition 1.17

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Alors, pour toute partie A de E

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

Remarque

⇨ Étant donné que $\mathbb{P}(X = x)$ est nul pour tout x en dehors de l'ensemble fini $X(\Omega)$, cette somme est bien définie puisqu'elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition 1.18

On dit que deux variables aléatoires $X, Y : \Omega \to E$ suivent la même loi lorsque

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(Y \in A).$$

Si tel est le cas, on écrit $X \sim Y$.

Remarques

⇨ En pratique, pour montrer que X et Y suivent la même loi, il suffit de déterminer un ensemble fini E' tel que $X(\Omega) \subset E'$ et $Y(\Omega) \subset E'$, puis de montrer que

$$\forall a \in E', \quad \mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(Y = a).$$

⇨ Deux variables aléatoires qui suivent la même loi sont rarement égales. Par exemple, si A est un évènement de probabilité $1/2$, les variables aléatoires $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ suivent la même loi sans être égales.

Proposition 1.19

Si $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire, $X(\Omega)$ est un ensemble fini que l'on note $\{x_1, \dots, x_n\}$. Alors, la famille des $(X = x_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ forme un système complet d'évènements.

Remarques

⇨ On utilisera souvent ce système complet d'évènements dans la formule des probabilités totales.

⇨ Cette proposition reste vraie si on remplace $X(\Omega)$ par une partie finie E' de E telle que $X(\Omega) \subset E'$.

Définition 1.20

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$. On note $f(X)$ la variable aléatoire $f \circ X : \Omega \to F$.

Remarque

⇨ Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$. Alors, pour tout $y \in F$

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

Proposition 1.21

Soit $X, Y : \Omega \to E$ deux variables aléatoires et $f : E \to F$. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

1.3 Lois usuelles

Définition 1.22: Loi uniforme

Soit A un ensemble fini non vide. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans A suit une *loi uniforme* sur A lorsque

$$\forall a \in A, \quad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{\text{Card } A}.$$

Si tel est le cas, on note $X \sim \mathcal{U}(A)$.

Remarque

⇨ Si X suit une loi uniforme sur A, alors $X(\Omega) = A$.

Exercice 7

⇨ Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![-2, 2]\!]$. Déterminer la loi de $X^2 + 1$.

Définition 1.23: Loi de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit la *loi de Bernoulli* de paramètre p lorsque

$$\mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Si tel est le cas, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarques

⇨ Si $p \in [0, 1]$, il est courant de poser $q := 1 - p \in [0, 1]$.

⇨ Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

⇨ Toute variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1\}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p := \mathbb{P}(X = 1)$. En particulier, si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un évènement, alors $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p := \mathbb{P}(A)$.

⇨ On dit qu'une variable aléatoire Y à valeurs dans $\{-1, 1\}$ suit une loi de Rademacher lorsque

$$\mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

Exemple

⇨ On considère l'expérience aléatoire d'un tir de penalty dans un match de foot. La variable aléatoire $X : \Omega \to \{0, 1\}$ décrit le résultat de ce tir : 1 si le penalty est réussi et 0 si le penalty est manqué. X suit donc une loi de Bernoulli dont le paramètre p est estimé, selon les joueurs, entre 70% et 90%.

Définition 1.24: Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ suit la *loi binomiale* de paramètre (n, p) lorsque

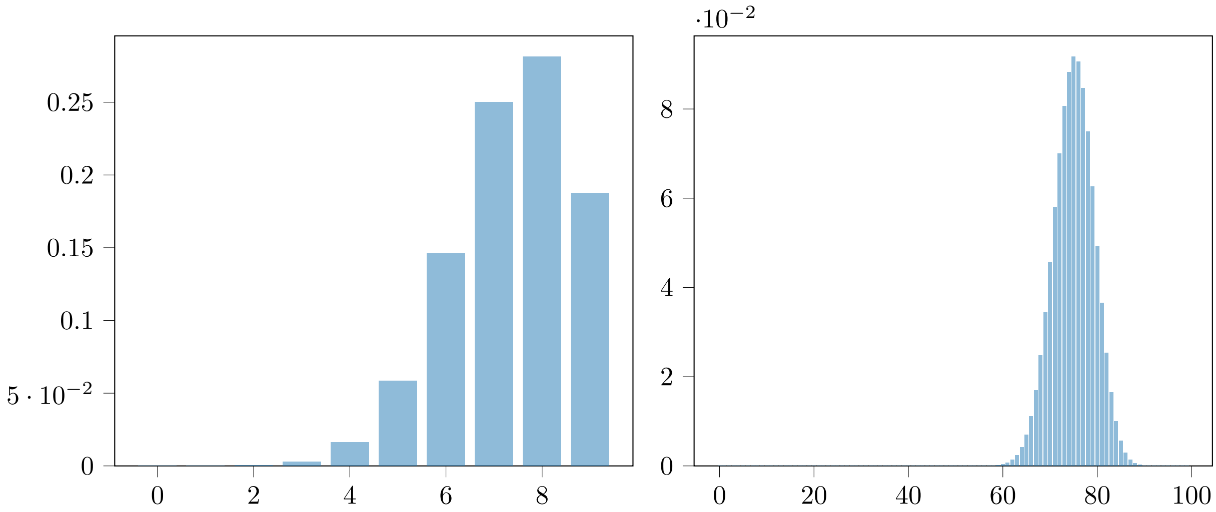
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Si tel est le cas, on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Remarques

⇨ La loi binomiale $\mathcal{B}(1, p)$ n'est autre que la loi de Bernoulli de paramètre p.

⇨ Si X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) où $p \in]0, 1[$, alors $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.



Au début de ce chapitre, nous avons décrit des situations probabilistes en définissant proprement un univers Ω ainsi qu'une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω. Mais en avançant dans les exercices, nous nous sommes éloignés de l'univers Ω pour décrire désormais notre expérience à l'aide de variables aléatoires. C'est ce que nous ferons de plus en plus. La description de notre problème probabiliste se fera par la donnée d'une ou plusieurs variables aléatoires dont nous donnerons les lois, plutôt que de nous concentrer sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Cette abstraction nous sera très utile. Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, on a envie de choisir $\Omega_1 = [\![1, 6]\!]$ muni de la probabilité uniforme. Mais si on lance deux fois le dé, l'univers $\Omega_2 = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la loi uniforme semble plus approprié. Toute probabilité d'un évènement faisant intervenir les deux lancers de dés doit être calculée dans le cadre de l'univers Ω_2. Cependant Ω_1 nous suffit si on s'intéresse uniquement au premier lancer. Pour autant, doit-on changer d'univers à chaque fois qu'on change de question ? La réponse des probabilistes à ce problème consiste à négliger une bonne fois pour toutes l'univers Ω. Par exemple, si un exercice vous met dans la situation « On lance un dé à 6 faces et on note X la face obtenue », vous pouvez affirmer que X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, 6]\!]$ sans évoquer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$.

Cependant, les mathématiciens se demandent souvent si les objets qu'ils manipulent existent bien. En prépa, c'est un problème que nous pourrons le plus souvent ignorer. Mais, lorsque l'on souhaite travailler avec la rigueur que nous permettent les mathématiques, il est important de démontrer que les espaces probabilisés dont nous parlons existent bien. De nombreux théorèmes, qui ne sont pas au programme de prépa, nous permettent de justifier l'existence de tels espaces. Par exemple, si E est un ensemble fini et $(p_x)_{x \in E}$ est une distribution de probabilités sur E, on peut montrer qu'il existe bien un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{P}(X = x) = p_x.$$

2 Dépendance des évènements

2.1 Probabilité conditionnelle

On se donne une expérience aléatoire associée à un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. Si on réalise n fois cette expérience aléatoire et qu'on compte le nombre de fois n_B où l'évènement B a été réalisé ainsi que le nombre de fois $n_{A\cap B}$ parmi ces réalisations où l'évènement A a aussi été réalisé, alors

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{n_{A\cap B}}{n} \cdot \frac{n}{n_B} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

On appelle ce nombre, probabilité de A sachant B.

Définition 2.1

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement de probabilité non nulle. Pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on appelle *probabilité de A sachant B* le nombre

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition 2.2

Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement de probabilité non nulle. Alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(A|B) \end{array}$$

est une probabilité sur Ω.

Remarque

⇨ Attention, bien qu'on écrive $\mathbb{P}(A|B)$, $A|B$ n'est pas un évènement. La notation $\mathbb{P}_B(A)$ protège contre cette erreur.

2.2 Formule des probabilités totales

Proposition 2.3: Formule des probabilités totales

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement B

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i).$$

Remarques

⇨ Dans cette formule, par convention, on remplacera $\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$ par 0 lorsque $\mathbb{P}(A_i) = 0$.

⇨ C'est cette formule qui se cache derrière les arbres de probabilité utilisés dans le secondaire. Afin d'aborder des exercices plus complexes, il est important de ne plus recourir à ces arbres et d'utiliser directement la formule des probabilités totales.

Exercice 8

⇨ Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules noires et $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches. On tire deux boules successivement sans remise. Avec quelle probabilité la deuxième boule tirée est-elle blanche ?

Proposition 2.4: Formule des probabilités composées

Soit $A_1, \ldots, A_n$ des évènements tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}).$$

Exercices 9

⇨ Une urne contient $2n$ boules dont n noires et n blanches. On en tire 3 boules successivement. Avec quelle probabilité les tire-t-on dans l'ordre « noire, blanche, noire » si les tirages se font avec remise ? Et s'ils se font sans remise ?

⇨ Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On y effectue m tirages successifs. À chaque tirage, la boule est choisie avec une probabilité uniforme sur toutes les boules présentes. Avant le tirage suivant, on replace dans l'urne la boule tirée et on ajoute une boule supplémentaire de la même couleur. Pour tout $n \in [\![1, m]\!]$, on désigne par X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1, la loi de X_2.
2. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
3. En déduire, par récurrence, la loi de X_n.

2.3 Formule de Bayes

Proposition 2.5: Formule de Bayes

Soit A et B deux évènements de probabilité non nulle. Alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \cdot \mathbb{P}(B|A).$$

Remarque

⇨ Si de plus $(C_1, \ldots, C_n)$ forme un système complet d'évènements

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i)\mathbb{P}(B|C_i)} \cdot \mathbb{P}(B|A).$$

Exercice 10

⇨ Un laboratoire pharmaceutique indique pour un test permettant de détecter une maladie, sa sensibilité α qui est la probabilité que le test soit positif si le sujet est malade, et sa spécificité β qui est la probabilité que le test soit négatif si le sujet est sain. Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur 1000 personnes, calculer la probabilité pour que vous soyez un sujet sain alors que votre test est positif. Faites une application numérique pour $\alpha := 98\%$ et $\beta := 97\%$.

2.4 Indépendance

Définition 2.6

On dit que deux évènements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont *indépendants* lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Remarques

⇨ Si A et B sont deux évènements tels que B est de probabilité non nulle, alors A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

⇨ Il est important de ne pas confondre les notions d'incompatibilité et d'indépendance. Notons d'ailleurs que la notion d'incompatibilité ne dépend pas de la loi de probabilité utilisée alors que la notion d'indépendance en dépend.

Proposition 2.7

Soit A et B deux évènements indépendants. Alors A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Remarque

⇨ On en déduit que si A et B sont indépendants, il en est de même pour $\bar{A}$ et B, ainsi que pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Définition 2.8

On dit que les évènements $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont *mutuellement indépendants* lorsque, quel que soit $I \subset [\![1, n]\!]$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques

⇨ Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. Autrement dit

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j).$$

Cependant, comme le montre le prochain exercice, des évènements peuvent être deux à deux indépendants sans être mutuellement indépendants.

⇨ Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont mutuellement indépendants, alors $B_1 \in \{A_1, \bar{A}_1\}, \ldots, B_n \in \{A_n, \bar{A}_n\}$ sont mutuellement indépendants.

Exercice 11

⇨ On lance successivement deux dés équilibrés. On modélise cela en prenant $\Omega := [\![1,6]\!]^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme. On considère les évènements suivants :
— $A :=$ « Le premier dé est pair ».
— $B :=$ « Le second dé est impair ».
— $C :=$ « La somme des deux dés est paire ».
Sont-ils deux à deux indépendants ? Sont-ils mutuellement indépendants ?

Définition 2.9

— On dit que deux variables aléatoires $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ sont *indépendantes* lorsque quelles que soient les parties $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
— On dit que n variables aléatoires $X_1 : \Omega \to E_1, \ldots, X_n : \Omega \to E_n$ sont *mutuellement indépendantes* lorsque quelles que soient les parties $A_1 \in \mathcal{P}(E_1), \ldots, A_n \in \mathcal{P}(E_n)$, les évènements $(X_1 \in A_1), \ldots, (X_n \in A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)$ sont mutuellement indépendants.

Remarques

⇨ Si X et Y sont indépendantes, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

⇨ Si $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes. Cependant, la réciproque est fausse. Lorsqu'on parle de variables aléatoires indépendantes sans plus de précision, il faut comprendre que les variables aléatoires sont mutuellement indépendantes.

Proposition 2.10

Soit $X_1 : \Omega \to E_1, \ldots, X_n : \Omega \to E_n$, n variables aléatoires. Alors, elles sont mutuellement indépendantes si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap \cdots \cap (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Remarque

⇨ Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{P}(\Omega)$. Alors $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si et seulement si les variables aléatoires $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$ sont mutuellement indépendantes.

Exercice 12

⇨ Soit X, Y, Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les évènements $(X = Y)$ et $(Y = Z)$ soient indépendants.

Proposition 2.11: Lemme des coalitions

— Soit $X_1 : \Omega \to E_1, \ldots, X_n : \Omega \to E_n$, des variables aléatoires mutuellement indépendantes et

$$f : E_1 \times \cdots \times E_m \to F, \qquad g : E_{m+1} \times \cdots \times E_n \to G$$

deux fonctions. Alors, les variables aléatoires $f(X_1, \ldots, X_m) : \Omega \to F$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n) : \Omega \to G$ sont indépendantes.
— Soit $A_1, \ldots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. Si B est un évènement défini à partir des évènements $A_1, \ldots, A_m$ et C est un évènement défini à partir des évènements $A_{m+1}, \ldots, A_n$, alors B et C sont indépendants.

Remarques

⇨ Cet énoncé se généralise facilement à un nombre fini de coalitions et nous assure que les variables aléatoires et les évènements obtenus sont mutuellement indépendants.

⇨ Supposons que l'on lance n fois une pièce et que les n lancers sont indépendants. Si $p, q \in \mathbb{N}$ sont tels que $p + q = n$, alors la variable aléatoire Y donnant le nombre de pile lors des p premiers lancers est indépendante de la variable aléatoire Z donnant le nombre de pile lors des q derniers lancers.

Exercice 13

⇨ Soit $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher. Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $Y_i := X_i X_{i+1}$.
1. Montrer que les variables $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ sont deux à deux indépendantes.
2. Sont-elles mutuellement indépendantes ?

2.5 Loi d'une somme

Proposition 2.12

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ deux variables aléatoires indépendantes. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k).$$

Remarque

⇨ Plus généralement, si $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ sont deux variables dont on ne fait aucune hypothèse d'indépendance

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}((X=k) \cap (Y=n-k)).$$

Proposition 2.13

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ deux variables aléatoires indépendantes. On suppose qu'il existe $p \in [0,1]$ et $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$. Alors $X+Y \sim \mathcal{B}(n+m,p)$.

Proposition 2.14

Soit $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \{0,1\}$ des variables de Bernoulli mutuellement indépendantes de même paramètre $p \in [0,1]$. Alors

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n,p).$$

Exercice 14

⇨ Deux joueurs lancent une pièce de monnaie équilibrée n fois chacun. Calculer la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de fois pile. En déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$.