21.1.2 Variable aléatoire

Définition 21.1.13

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle *variable aléatoire* à valeurs dans E toute application $X : \Omega \to E$.

Remarques

- ⇨ On dit qu'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ est réelle lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$.
- ⇨ On considère l'expérience qui consiste à lancer deux fois un dé à 6 faces. On munit l'univers $\Omega := [\![1,6]\!]^2$ de la probabilité uniforme et on pose

$$X_1 : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & [\![1,6]\!] \\ (k_1,k_2) & \longmapsto & k_1 \end{array} \quad \text{et} \quad X_2 : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & [\![1,6]\!] \\ (k_1,k_2) & \longmapsto & k_2 \end{array}$$

Alors X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires. X_1 donne le résultat du premier lancer tandis que X_2 donne le résultat du second lancer.

Définition 21.1.14

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Alors, pour toute partie A de E, on définit l'évènement

$$(X \in A) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}.$$

Exemple : En reprenant l'expérience dans laquelle on lance deux fois un dé, on obtient.

$$(X_1 \in \{1,2\}) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\}$$

$$(X_2 \in \{1,2\}) = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$$

Remarques

- ⇨ Si $x \in E$, l'évènement $(X \in \{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ est noté $(X = x)$.
- ⇨ Si X est réelle et $a, b \in \mathbb{R}$, l'évènement $(X \in [a,b]) = \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\}$ est noté $(a \leqslant X \leqslant b)$.
- ⇨ L'évènement $(X \in A)$ est aussi noté $\{X \in A\}$ ou $[X \in A]$. La probabilité d'un tel évènement est notée $\mathbb{P}(X \in A)$.

Proposition 21.1.15

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors

$$(X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B), \qquad (X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B),$$

$$(X \in \bar{A}) = \overline{(X \in A)}.$$

Preuve : Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

(i) Montrons que $(X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B)$. On a $\forall \omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \omega \in (X \in A \cap B) &\Leftrightarrow X(\omega) \in A \cap B \\ &\Leftrightarrow X(\omega) \in A \text{ et } X(\omega) \in B \\ &\Leftrightarrow \omega \in (X \in A) \text{ et } \omega \in (X \in B). \\ &\Leftrightarrow \omega \in (X \in A) \cap (X \in B) \end{aligned}$$

Donc $(X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B)$.

(ii) Montrons que $(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B)$. On a $\forall \omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \omega \in (X \in A \cup B) &\Leftrightarrow X(\omega) \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow X(\omega) \in A \text{ ou } X(\omega) \in B \\ &\Leftrightarrow \omega \in (X \in A) \text{ ou } \omega \in (X \in B) \\ &\Leftrightarrow \omega \in (X \in A) \cup (X \in B) \end{aligned}$$

Donc $(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B)$.

(iii) Montrons que $(X \in \bar{A}) = \overline{(X \in A)}$. On a $\forall \omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} \omega \in (X \in \bar{A}) &\Leftrightarrow X(\omega) \in \bar{A} \\ &\Leftrightarrow X(\omega) \notin A \\ &\Leftrightarrow \text{non } (X(\omega) \in A) \end{aligned}$$

$\iff$ non $(\omega \in \overline{(X\in A)})$
$\iff$ $\omega \in (X \in A)$

Donc $(X\in \overline{A}) = \overline{(X\in A)}$.

Remarque

➯ On en déduit que si $A, B \in \mathcal{P}(E)$ sont disjoints, alors $(X \in A \sqcup B) = (X \in A) \sqcup (X \in B)$. En particulier

$$\mathbb{P}(X \in A \sqcup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B).$$

Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors
- $(X \in A \cup B) = (X\in A) \cup (X \in B)$
- $(X\in A) \cap (X \in B) = (X \in A\cap B) = (X \in \emptyset) = \emptyset$

Donc $(X\in A)$ et $(X \in B)$ sont incompatibles. On en déduit que
$$(X \in A \cup B) = (X\in A) \cup (X\in B).$$
Donc
$$\mathbb{P}(X\in A\cup B) = \mathbb{P}((X\in A)\cup(X\in B))$$
$$= \mathbb{P}(X\in A) + \mathbb{P}(X\in B)$$

Exercice 5

➯ Soit $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ une variable aléatoire à valeurs entières. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \leqslant n) - \mathbb{P}(X \leqslant n-1).$$

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{Z}$ une variable aléatoire et $n \in \mathbb{Z}$. Alors
$$]\!]-\infty, n]\!] =]\!]-\infty, n-1]\!] \cup \{n\}$$
donc $\mathbb{P}(X \in]\!]-\infty,n]\!]) = \mathbb{P}(X \in]\!]-\infty, n-1]\!]) + \mathbb{P}(X\in\{n\})$
donc $\mathbb{P}(X\leqslant n) = \mathbb{P}(X\leqslant n-1) + \mathbb{P}(X=n)$
donc $\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(X\leqslant n) - \mathbb{P}(X\leqslant n-1)$.

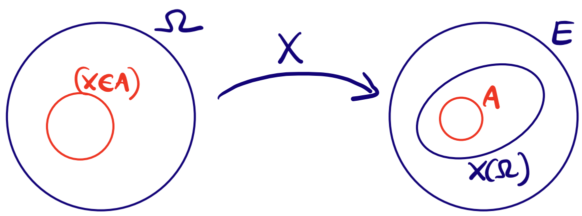
Définition 21.1.16

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_X : & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}\left(X \in A\right) \end{array}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$, appelée *loi* de X.

Preuve : Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire.



Alors $X(\Omega)$ est un ensemble fini comme image par X de l'ensemble fini Ω. On pose

$$\begin{array}{rccc} \mathbb{P}_X : & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(X\in A) \end{array}$$

Montrons que $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.
(i) $\mathbb{P}_X$ est bien à valeurs dans $[0,1]$ car si $A \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X\in A) \in [0,1]$.
(ii) On a
$$\mathbb{P}_X(X(\Omega)) = \mathbb{P}(X \in X(\Omega))$$
$$= \mathbb{P}(\Omega)$$
$$= 1$$
(iii) Soit A et $B \in X(\Omega)$ deux événements incompatibles. Alors
$$\mathbb{P}_X(A\cup B) = \mathbb{P}(X\in A\cup B)$$

$$= \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B)$$
$$= \mathbb{P}_X(A) + \mathbb{P}_X(B)$$

Donc $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Remarques

- ⇨ La loi de X est entièrement déterminée par sa distribution de probabilité $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.
- ⇨ Si $x \in E$ n'appartient pas à $X(\Omega)$, alors $\mathbb{P}(X = x) = 0$.
- ⇨ Plus généralement, si E' est une partie finie de E telle que $X(\Omega) \subset E'$, alors

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_X : & \mathcal{P}(E') & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(X \in A) \end{array}$$

  est une probabilité sur E'. Dans la suite de ce cours, on pourra toujours remplacer $X(\Omega)$ par un ensemble fini E' tel que $X(\Omega) \subset E'$. En pratique, lorsqu'il nous sera demandé de déterminer la loi d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$, on commencera par déterminer un ensemble fini E' tel que $X(\Omega) \subset E'$ puis on calculera $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in E'$.
- ⇨ Si $(\Omega_1, \mathbb{P}_1)$ est un espace probabilisé, Ω_2 est un ensemble fini et F est une application de Ω_1 dans Ω_2, alors

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_2 : & \mathcal{P}(\Omega_2) & \longrightarrow & [0,1] \\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}_1(F \in A) \end{array}$$

  est une probabilité sur Ω_2, appelée *mesure image* de $\mathbb{P}_1$ par F.
- ⇨ En reprenant les notations utilisées dans les exemples de répartition de n boules discernables/indiscernables dans p urnes discernables donnés plus haut, on considère la fonction d'oubli $F : \Omega_D \to \Omega_I$. À une répartition de boules numérotées et donc discernables, elle associe la répartition des boules indiscernables, où on a effacé le numéro des boules. Autrement dit, si $\omega := (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_D$, alors $F(\omega) = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega_I$ où

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad x_j = \mathrm{Card}\{i \in [\![1, n]\!] \mid \omega_i = j\}.$$

  La mesure de probabilité naturelle sur Ω_I est la mesure image par F de la probabilité uniforme sur Ω_D.

Si on souhaite répartir 2 boules discernables (numérotées 1 et 2) dans 2 urnes discernables (numérotées 1 et 2), l'univers des possibles est
$$\Omega_D := \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$$
la réalisation $\omega := (2,1)$ représentant le cas où la première boule est mise dans la seconde urne et la seconde boule est mise dans la première urne. La probabilité "naturelle" sur cet univers est la probabilité uniforme.

On note $\Omega_I = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$ l'univers des possibles où on a oublié le numéro des boules. Par exemple, la réalisation $\omega := (2,0)$ représente la réalisation où les deux boules ont été mises dans la première urne.

La fonction d'oubli $F : \Omega_D \longrightarrow \Omega_I$ vérifie donc
$$F(1,1) = (2,0)$$
$$F(1,2) = (1,1)$$
$$F(2,1) = (1,1)$$
$$F(2,2) = (0,2)$$
Si on note $\mathbb{P}_I$ la mesure image sur Ω_I de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_D$ sur Ω_D, alors
$$\mathbb{P}_I(\{(2,0)\}) = \mathbb{P}_D(F = (2,0)) = \mathbb{P}_D(\{(1,1)\}) = 1/4$$
$$\mathbb{P}_I(\{(1,1)\}) = \mathbb{P}_D(F = (1,1)) = \mathbb{P}_D(\{(1,2), (2,1)\}) = 1/2$$
$$\mathbb{P}_I(\{(0,2)\}) = \mathbb{P}_D(F = (0,2)) = \mathbb{P}_D(\{(2,2)\}) = 1/4$$

Exercice 6

⇨ On lance successivement deux dés à 6 faces. On modélise cette expérience en choisissant $\Omega := [\![1, 6]\!]^2$ muni de la probabilité uniforme. On note $A_1 : \Omega \to \mathbb{N}$ le résultat du premier dé et $A_2 : \Omega \to \mathbb{N}$ le résultat du second dé. Déterminer les lois de A_1, A_2 ainsi que la loi de la variable aléatoire $A_1 + A_2 : \Omega \to \mathbb{N}$ donnant la somme des deux nombres obtenus.

- On cherche la loi de A_1. On a $A_1(\Omega) = [\![1,6]\!]$. De plus

$\forall k \in [\![1,6]\!] \quad \mathbb{P}(A_1 = k) = \mathbb{P}(\{(k,1),(k,2),\dots,(k,6)\})$

$$= \frac{\mathrm{Card}(\{(k,1),(k,2),\dots,(k,6)\})}{\mathrm{Card}([\![1,6]\!]^2)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- De même $A_2(\Omega) = [\![1,6]\!]$ et $\forall k \in [\![1,6]\!] \quad \mathbb{P}(A_2 = k) = \frac{1}{6}$.
- De plus $(A_1 + A_2)(\Omega) = [\![2,12]\!]$

$d_1 \backslash d_2$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Alors
$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 = 2) = \mathbb{P}(\{(1,1)\}) = 1/36$$
$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 = 3) = \mathbb{P}(\{(2,1),(1,2)\}) = 2/36 = 1/18$$
$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 = 4) = \mathbb{P}(\{(3,1),(2,2),(1,3)\}) = 3/36 = 1/12$$
$$\vdots$$
$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 = 7) = \mathbb{P}(\{(6,1),(5,2),\dots,(1,6)\}) = 6/36 = 1/6.$$
$$\vdots$$
$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 = 12) = \mathbb{P}(\{(6,6)\}) = 1/36$$

On a donc

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=k)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

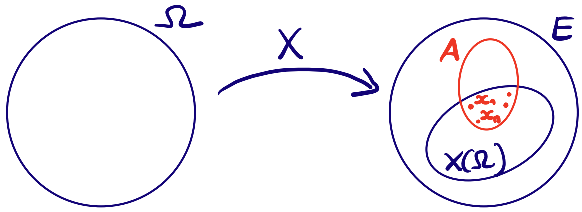
$\underbrace{k = 2, \dots, 7}_{\frac{k-1}{36}}$ $\qquad$ $\underbrace{k = 7, \dots, 12}_{\frac{13-k}{36}}$

Proposition 21.1.17

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. Alors, pour toute partie A de E

$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x)$$

__Preuve:__ Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire et A une partie de E.



Puisque $X(\Omega)$ est fini, il en est de même pour $A \cap X(\Omega)$. On note $x_1, \dots, x_n$ ses éléments. Alors

$$(X\in A) = (X\in (A\setminus X(\Omega)) \sqcup (A\cap X(\Omega)))$$
$$= \underbrace{(X\in A\setminus X(\Omega))}_{=\emptyset} \sqcup (X\in \underbrace{A\cap X(\Omega)}_{=\{x_1,\dots,x_n\}})$$
$$= \left(X\in \bigsqcup_{k=1}^{n}\{x_k\}\right) = \bigsqcup_{k=1}^{n}(X=x_k)$$

Donc $\mathbb{P}(X\in A) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X=x_k)$. Autrement dit
$$\mathbb{P}(X\in A) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)$$

Puisque $\mathbb{P}(X=x)=0$ pour $x\notin X(\Omega)$, on en déduit que
$$\mathbb{P}(X\in A) = \sum_{x\in A\cap X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x) + \sum_{x\in \underbrace{A\cap\overline{X(\Omega)}}_{\text{ensemble pouvant être infini}}}\underbrace{\mathbb{P}(X=x)}_{=0}$$
$$= \sum_{x\in A}\mathbb{P}(X=x)$$

A peut être infini, mais les x pour lesquels $\mathbb{P}(X=x)\neq 0$ étant tous des éléments de $A\cap X(\Omega)$, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans cette somme, ce qui fait qu'elle est bien définie.

Remarque

⇨ Étant donné que $\mathbb{P}(X=x)$ est nul pour tout x en dehors de l'ensemble fini $X(\Omega)$, cette somme est bien définie puisqu'elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

Définition 21.1.18

On dit que deux variables aléatoires $X, Y : \Omega\to E$ suivent la même loi lorsque
$$\forall A\in\mathcal{P}(E),\quad \mathbb{P}(X\in A)=\mathbb{P}(Y\in A).$$
Si tel est le cas, on écrit $X\sim Y$.

Remarques

⇨ En pratique, pour montrer que X et Y suivent la même loi, il suffit de déterminer un ensemble fini E' tel que $X(\Omega)\subset E'$ et $Y(\Omega)\subset E'$, puis de montrer que
$$\forall a\in E',\quad \mathbb{P}(X=a)=\mathbb{P}(Y=a).$$

⇨ Deux variables aléatoires qui suivent la même loi sont rarement égales. Par exemple, si A est un évènement de probabilité $1/2$, les variables aléatoires $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ suivent la même loi sans être égales.

Soit A un évènement de probabilité $1/2$. On pose

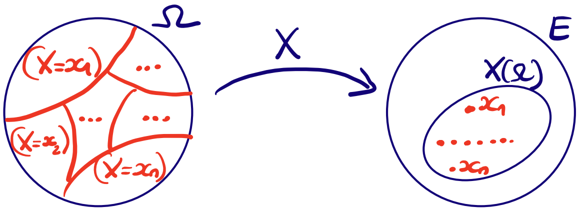
$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \{0,1\}\\ \omega & \longmapsto & \begin{cases}1 \text{ si } \omega\in A\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\end{array}\qquad \mathbb{1}_{\bar{A}} : \begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \{0,1\}\\ \omega & \longmapsto & \begin{cases}1 \text{ si } \omega\in \bar{A}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\end{array}$$

Alors $\mathbb{1}_A(\Omega)\subset\{0,1\}$ et $\mathbb{1}_{\bar{A}}(\Omega)\subset\{0,1\}$. De plus
$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_A=1) = \mathbb{P}(A) = 1/2$$
$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_A=0) = \mathbb{P}(\bar{A}) = 1-\mathbb{P}(A) = 1-1/2 = 1/2$$
$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\bar{A}}=1) = \mathbb{P}(\bar{A}) = 1/2 = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A=1)$$
$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\bar{A}}=0) = \mathbb{P}(\bar{\bar{A}}) = \mathbb{P}(A) = 1/2 = \mathbb{P}(\mathbb{1}_A=0)$$
Donc $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{\bar{A}}$ suivent la même loi. Pourtant $\mathbb{1}_A\neq\mathbb{1}_{\bar{A}}$ car si $\omega\in A$, $\mathbb{1}_A(\omega)=1\neq\mathbb{1}_{\bar{A}}(\omega)=0$.

Proposition 21.1.19

Si $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire, $X(\Omega)$ est un ensemble fini que l'on note $\{x_1, \dots, x_n\}$. Alors, la famille des $(X = x_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ forme un système complet d'évènements.

Preuve :



Puisque Ω est fini, $X(\Omega)$ est fini. On note $x_1, \dots, x_n$ ses éléments. Montrons que $(X=x_1), \dots, (X=x_n)$ forme un système complet d'événements.

- Ce sont des parties de Ω
- On a

$$\bigcup_{i=1}^{n} (X=x_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (X \in \{x_i\}) = \left(X \in \bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\}\right)$$

$$= (X \in X(\Omega)) = \Omega.$$

- De plus, si $i, j \in [\![1, n]\!]$ sont tels que $i \neq j$

$$(X=x_i) \cap (X=x_j) = (X \in \{x_i\}) \cap (X \in \{x_j\})$$

$$= (X \in \underbrace{\{x_i\} \cap \{x_j\}}_{= \emptyset \text{ car } i \neq j})$$

$$= \emptyset$$

Donc $(X=x_1), \dots, (X=x_n)$ forme un système complet d'événement.

Remarques

⇨ On utilisera souvent ce système complet d'évènements dans la formule des probabilités totales.

⇨ Cette proposition reste vraie si on remplace $X(\Omega)$ par une partie finie E' de E telle que $X(\Omega) \subset E'$.

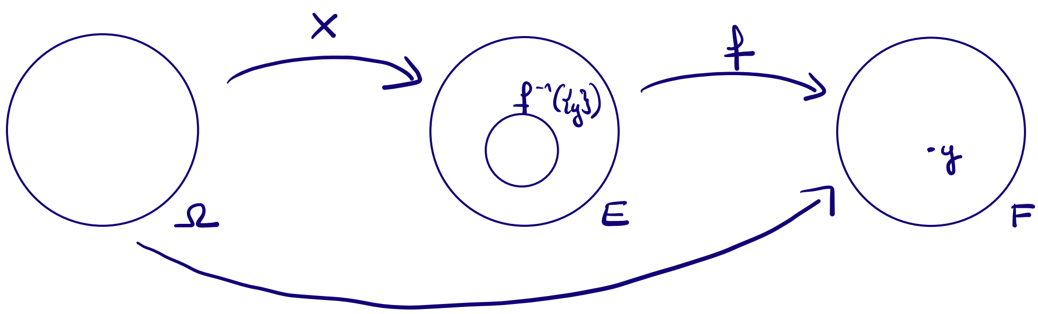
Définition 21.1.20

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$. On note $f(X)$ la variable aléatoire $f \circ X : \Omega \to F$.

Remarque

⇨ Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to F$. Alors, pour tout $y \in F$

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$



$$f(X) = f \circ X$$

Soit $X : \Omega \longrightarrow E$ une variable aléatoire, $f : E \longrightarrow F$ et $y \in F$. Alors

$$(f(X) = y) = (X \in f^{-1}(\{y\}))$$

En effet, ce sont deux parties de Ω et

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \omega \in (f(X)=y) \iff (f\circ X)(\omega) = y \iff f(X(\omega)) = y \iff X(\omega) \in f^{-1}(\{y\}) \iff \omega \in (X \in f^{-1}(\{y\}))$$

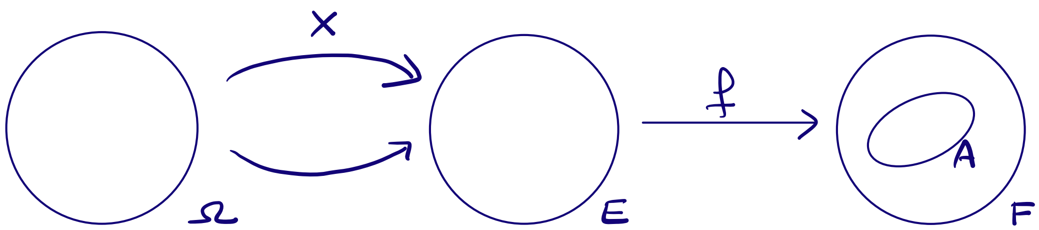
Donc $(f(X)=y) = (X \in f^{-1}(\{y\}))$, donc

$$\mathbb{P}(f(X)=y) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(\{y\})) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X=x) \text{ `` }=\text{'' } \sum_{f(x)=y} \mathbb{P}(X=x)\text{''}$$

Proposition 21.1.21

Soit $X, Y : \Omega \to E$ deux variables aléatoires et $f : E \to F$. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Preuve :



Soit $X, Y : \Omega \longrightarrow E$ deux variables aléatoires et $f : E \longrightarrow F$. On suppose que $X \sim Y$. Montrons que $f(X) \sim f(Y)$. Soit A une partie de F. Alors

$$(f(X) \in A) = (X \in f^{-1}(A))$$

En effet

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \omega \in (f(X) \in A) \iff (f\circ X)(\omega) \in A \iff f(X(\omega)) \in A \iff X(\omega) \in f^{-1}(A) \iff \omega \in (X \in f^{-1}(A))$$

Donc $(f(X)\in A) = (X \in f^{-1}(A))$. Donc

$$\mathbb{P}(f(X) \in A) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(A)) = \mathbb{P}(Y \in f^{-1}(A)) = \mathbb{P}(f(Y) \in A).$$

car $X \sim Y$

Donc $f(X) \sim f(Y)$.