Cours : Ordre, induction, récursivité

Table des matières

1 Ordre

1.1 Compléments sur les relations d'ordre

1.1.1 Retour sur la terminaison des fonctions récursives

Prouver qu'une fonction récursive termine revient à prouver deux choses :
— un appel, considéré seul (sans les appels récursifs engendrés), termine toujours ;
— l'arbre d'appel est fini.

Le premier point est le plus souvent évident, et quand il ne l'est pas les techniques pour le prouver sont les mêmes que pour un programme itératif : variant de boucle, typiquement. Pour le deuxième point, un arbre est fini si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes :
— il est à *branchement fini* (chaque nœud a un nombre fini d'enfants) ;
— il ne possède pas de branche infinie.

Remarque

⇨ Ce résultat est intuitivement évident, mais nécessite une version faible de l'axiome du choix pour être prouvé (*axiome du choix dépendant*). Il porte le nom de *lemme de König*.

Le fait que l'arbre soit à branchement fini découle directement du fait qu'un appel considéré individuellement termine (un nœud ayant une infinité d'enfants correspondrait à un appel faisant *directement* une infinité d'appels récursifs). Le point crucial est donc l'absence de branche infinie : il faut prouver que toute suite $f(x_0) \to f(x_1) \to \dots$ d'appels récursifs est finie. Le cas le plus simple est celui où l'argument est un entier naturel, qui décroît strictement au cours des appels :

Exemple

⇨ Considérons une fonction naïve pour calculer le n-ème terme de la suite de Fibonacci :

```
let rec fibo n =
  if n <= 1 then n
  else fibo (n - 1) + fibo (n - 2)
```

Chaque nœud interne de l'arbre d'appel possède deux enfants, et, le long d'une branche de l'arbre d'appel, la valeur de l'argument décroît strictement. Or les arguments sont des entiers naturels (cas de base si $n \leqslant 1$), et $\mathbb{N}$ muni de l'ordre usuel n'admet pas de suite infinie strictement décroissante : l'arbre d'appel est fini.

Dans le cas où les arguments ne décroissent pas strictement, on peut souvent se ramener à $\mathbb{N}$ en prenant l'image des arguments par une fonction bien choisie :
— la longueur d'une liste ;
— la hauteur ou la taille d'un arbre ;
— le nombre d'éléments d'un ensemble fini ;
— éventuellement autre chose, comme dans l'exemple ci-dessous que nous avons déjà traité :

```
let rec f n =
  if (n mod 2 <> 0) || (n = 0) then n
  else f (3 * n / 2)
```

Cependant, ce n'est pas toujours le cas :

Exercice 1

⇨ *Fonction d'Ackermann* La fonction d'Ackermann est définie pour $m, n \geqslant 0$ par :
— $A(0, n) = n + 1$
— $A(m, 0) = A(m - 1, 1)$ si $m \geqslant 1$

— $A(m,n) = A(m-1, A(m,n-1))$ si $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$.
Déterminer une forme close pour :

1. $A(1,n)$;
2. $A(2,n)$;
3. $A(3,n)$.

Si l'on cherche à prouver la terminaison de la fonction d'Ackermann, on est confronté à un problème :
— le premier argument ne décroît pas strictement au cours des appels, puisque un appel $A(m,n)$ donne un appel $A(m,n-1)$;
— le deuxième argument ne décroît pas non plus, puisque que ce même appel $A(m,n)$ donne un appel $A(m-1,x)$ avec $x = A(m,n-1)$ qui n'a aucun raison d'être strictement inférieur à n [1] ;
— même si ce n'est pas *a priori* évident, toute tentative de construire une fonction simple de m et n décroissant strictement au cours des appels est vouée à l'échec, à cause de l'appel sur $A(m,n-1)$.

On peut en revanche munir $\mathbb{N}^2$ de l'*ordre lexicographique* :

$$(m,n) \leqslant_2 (m',n') \Longleftrightarrow m < m' \text{ou} (m = m' \text{et} n \leqslant n')$$

On a alors bien $A(m,n) \to A(m',n') \Longrightarrow (m',n') <_2 (m,n)$: le problème est de savoir si la propriété fondamentale de l'ordre sur $\mathbb{N}$ que nous avons utilisée jusqu'à maintenant (l'absence de suites infinies strictement décroissantes) reste valable pour ce nouvel ensemble et ce nouvel ordre.

1.1.2 Ordres bien fondés

Définition 1.1

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.
— Soit A une partie de E. On dit que $a \in A$ est un élément *minimal* de A lorsque

$$\forall x \in A, \quad x \preceq a \quad \Longrightarrow \quad x = a.$$

— La relation $\preceq$ est dite *bien fondée* lorsque toute partie non vide de E admet un élément minimal.

Remarques

⇨ Si $(E, \preceq)$ est un ensemble ordonné, on défini la relation $\prec$ par

$$\forall x, y \in E, \quad x \prec y \quad \Longleftrightarrow \quad [x \preceq y \quad \text{et} \quad x \neq y]\,.$$

Si $x \prec y$, on dit que x est strictement inférieur à y. Si A est une partie de E, un élément $a \in A$ est donc minimal si et seulement si il n'existe aucun élément de A qui lui est strictement inférieur

⇨ Une partie peut avoir plusieurs éléments minimaux. Par exemple, si $\mathbb{N}$ est muni de la relation de divisibilité, l'ensemble $A \coloneqq \{2,3,6\}$ admet deux éléments minimaux : 2 et 3.

⇨ Si $\preceq$ est un ordre total, alors il est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet un plus petit élément. De tels ensembles sont dits *bien ordonnés* ; la relation $\preceq$ est alors qualifiée de *bon ordre*.

Exemples

⇨ $\mathbb{N}$, muni de l'ordre usuel, est bien ordonné donc bien fondé.

⇨ $\mathbb{Z}$, muni de l'ordre usuel, n'est pas bien fondé : $\mathbb{Z}$ n'a pas d'élément minimal.

⇨ $\mathbb{R}_+$, muni de l'ordre usuel, n'est pas bien fondé : $\mathbb{R}_+^*$ n'a pas d'élément minimal.

⇨ $\mathbb{N}$, muni de l'ordre de divisibilité est bien fondé, mais n'est pas bien ordonné.

Proposition 1.2

Soit $(E, \preceq)$ est un ensemble ordonné. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
— $(E, \preceq)$ est bien fondé.
— Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de E.
— Pour tout prédicat $\mathcal{P}$ défini sur E, si pour tout $x \in E$ on a

$$[\forall y \in E, \quad y \prec x \Longrightarrow \mathcal{P}(y)] \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(x),$$

alors $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour tout $x \in E$.

Remarque

⇨ Le troisième point affirme simplement qu'on peut raisonner par récurrence forte sur $(E, \preceq)$.

1. Et qui est en fait beaucoup, *beaucoup*, ***beaucoup*** plus grand que n.

Définition 1.3

Soit $(A, \preceq_A)$ et $(B, \preceq_B)$ deux ensembles bien ordonnés. La relation $\preceq$ définie sur $A \times B$ par

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad [a_1 \preceq_A a_2 \quad \text{ou} \quad (a_1 = a_2 \quad \text{et} \quad b_1 \preceq_B b_2)]$$

est une relation d'ordre, appelée *ordre lexicographique* sur $A \times B$.

Proposition 1.4

Soit $(A, \preceq_A)$ et $(B, \preceq_B)$ deux ensembles bien fondés. Alors, sur $A \times B$, l'ordre lexicographique est bien fondé.

Remarque

⇨ En particulier, l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^2$ est bien fondé, ce qui montre la terminaison de la fonction d'Ackermann.

Exercices 2

⇨ — Pour tout $p \geqslant 2$, définir l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^p$, et montrer qu'il est bien fondé.
— Définir l'ordre lexicographique sur l'ensemble des suites finies d'entiers naturels. Cet ordre est-il bien fondé ?

1.2 Structures inductives

L'arithmétique de Peano définit les entiers naturels de manière *inductive* :
— 0 est un entier naturel.
— Si n est un entier naturel, le *successeur* de n, noté $S(n)$ l'est aussi.
À cette définition inductive est associée un *principe de récurrence*.

Proposition 1.5

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat sur les entiers naturels. Si
— $\mathcal{P}(0)$ est vrai.
— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(S(n))$.
alors $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La notion d'ensemble inductif est essentiellement une généralisation de cette construction, et du principe de récurrence associé.

Définition 1.6

Soit E un ensemble. Une *définition inductive sur E* est la donnée :
— D'une partie $\mathcal{B} \subset E$ dont les éléments sont appelés *éléments de base*, ou *assertions*.
— D'un ensemble $\mathcal{K}$ de fonctions φ, éventuellement partielles, de $E^{a(\varphi)}$ dans E. L'entier $a(\varphi) \in \mathbb{N}^*$ est appelé *arité* de φ, et les fonctions φ seront souvent appelées *constructeurs*, ou *règles d'inférence*.

Proposition 1.7

Soit E un ensemble, $\mathcal{B}$ un ensemble d'assertions et $\mathcal{K}$ un ensemble de constructeurs. Alors, au sens de l'inclusion, il existe un plus petit ensemble X tel que
— $\mathcal{B} \subset X$.
— Pour tout constructeur $\varphi \in \mathcal{K}$, si $x_1, \ldots, x_{a(\varphi)} \in X$ et si $\varphi(x_1, \ldots, x_{a(\varphi)})$ est défini, alors

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{a(\varphi)}) \in X.$$

On l'appelle *ensemble inductif* associé à cette définition.

Exercice 3

⇨ 1. Quel est l'ensemble inductif X défini par :
   — $E := \mathbb{R}$.
   — $\mathcal{B} := \{1\}$.
   — $\mathcal{K} := \{x \mapsto 2x, x \mapsto 2x+1, x \mapsto -x\}$?
2. Donner une définition inductive de l'ensemble des entiers pairs, puis une de l'ensemble des entiers impairs.

Exemple

⇨ *Arbres.* L'exemple le plus important d'ensemble inductif est celui des arbres Par exemple, les arbres binaires non étiquetés peuvent être définis par $\mathcal{B} := \{F\}$ et $\mathcal{K} := \{(g, d) \mapsto N(g, d)\}$. D'une certaine manière, tous les autres ensembles inductifs peuvent être vus comme un cas particulier de la construction sur les arbres.

La définition que nous avons donné de la partie X n'est pas constructive, et n'a clairement pas de sens si l'on ne dispose pas d'un ensemble E dont considérer les parties. On peut cependant procéder autrement, d'une manière bien plus intéressante d'un point de vue informatique.

Proposition 1.8

Considérons une définition inductive donnée par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{K}$. Pour un ensemble Y, on définit

$$\mathcal{K}(Y) \coloneqq \left\{\varphi(x_1, \ldots, x_{a(\varphi)}) : \varphi \in \mathcal{K} \quad \text{et} \quad x_1, \ldots, x_{a(\varphi)} \in Y\right\}.$$

On définit ensuite la suite d'ensembles (Y_n) par
- $Y_0 \coloneqq \mathcal{B}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} \coloneqq Y_n \cup \mathcal{K}(Y_n)$

La partie inductive définie par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{K}$ est alors égale à

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n.$$

Définition 1.9

On appelle *hauteur* d'un élément $x \in X$, le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in Y_n$.

Remarque

⇨ Cette définition correspond bien à la définition usuelle de la hauteur d'un arbre.

Exercice 4

⇨ On considère la définition inductive $\mathcal{B} \coloneqq \{0\}$ et $\mathcal{K} \coloneqq \{n \mapsto 2n, n \mapsto 2n+1\}$. Donner une expression simple de la hauteur d'un entier naturel n.

Proposition 1.10: Preuve par induction structurelle

Soient X un ensemble inductif et $\mathcal{P}$ un prédicat sur X. Pour montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour tout élément x de X, il suffit de montrer que
- $\mathcal{P}(b)$ est vrai pour tout $b \in \mathcal{B}$.
- Pour tout constructeur $\varphi \in \mathcal{K}$, pour tout $x_1, \ldots, x_{a(\varphi)} \in X$

$$(\mathcal{P}(x_1) \quad \text{et} \quad \ldots \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(x_{a(\varphi)})) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(\varphi(x_1, \ldots, x_{a(\varphi)})).$$

Remarque

⇨ On peut démontrer ce principe assez facilement à l'aide d'une récurrence sur la hauteur de $x \in X$.

Définition 1.11: Ambiguïté

Une définition inductive est *non ambiguë* si les deux conditions suivantes sont remplies :
- $\forall \varphi \in \mathcal{K}, \quad \forall x_1, \ldots, x_{a(\varphi)} \in X, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_{a(\varphi)}) \notin \mathcal{B}$.
- $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{K}, \quad \forall x_1, \ldots, x_{a(\varphi)}, y_1, \ldots, y_{a(\psi)} \in X$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_{a(\varphi)}) = \psi(y_1, \ldots, y_{a(\psi)}) \Longrightarrow \left[\varphi = \psi \quad \text{et} \quad x_1 = y_1 \quad \text{et} \quad \cdots \quad \text{et} \quad x_{a(\varphi)} = y_{a(\psi)}\right].$$

Remarque

⇨ Dans un ensemble inductif doté d'une définition non ambiguë, les éléments s'identifient à leur arbre de dérivation. Dans le cas d'une définition ambiguë, plusieurs arbres de dérivation peuvent correspondre à un même élément.

Exercices 5

⇨ Les définitions inductives suivantes sont-elles ambiguës ?

1. $\mathcal{B} \coloneqq \{0\}, \mathcal{K} \coloneqq \{n \mapsto n+1\}$.
2. $\mathcal{B} \coloneqq \{0, 1\}, \mathcal{K} \coloneqq \{n \mapsto n+1\}$.
3. $\mathcal{B} \coloneqq \{0\}, \mathcal{K} \coloneqq \{n \mapsto n+1, n \mapsto n-1\}$.
4. $\mathcal{B} \coloneqq \{0\}, \mathcal{K} \coloneqq \{n \mapsto 2n, n \mapsto 2n+1\}$.
5. $\mathcal{B} \coloneqq \{0\}, \mathcal{K} \coloneqq \{n \mapsto 2n, n \mapsto n+1\}$.

⇨ Donner une définition inductive non ambiguë, et non triviale de $\mathbb{Z}$.

Si l'on dispose d'une définition inductive non ambiguë, on peut l'utiliser pour définir des fonctions sur X de manière inductive. Il suffit de :

— Donner la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{B}$.

— Pour chaque constructeur φ, définir une fonction f_φ permettant de définir

$$f(\varphi(x_1, \ldots, x_{a(\varphi)}) = f_\varphi(x_1, \ldots, x_{a(\varphi)}, f(x_1), \ldots, f(x_{a(\varphi)}))).$$

Exercice 6

⇨ Définir sous cette forme :

1. La factorielle d'un entier n, en partant de la définition inductive zéro/successeur.
2. Le nombre de feuilles d'un arbre binaire strict, en partant de la définition inductive naturelle.