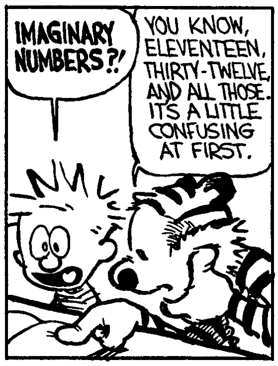
# Nombres Complexes

« La voie la plus courte et la meilleure entre deux vérités du domaine réel passe souvent par le domaine imaginaire. »

— Jacques Hadamard (1865–1963)




## Table des matières



# 1 Le corps des nombres complexes

## 1.1 Définition, conjugaison, module

Le carré de tout nombre réel étant positif, l'équation

$$x^2 = -1$$

n'admet aucune solution réelle. Nous admettrons qu'il existe un ensemble de nombres $A$ ayant les propriétés suivantes.

— $\mathbb{R} \subset A$.
— On peut additionner, soustraire et multiplier les éléments de $A$ en utilisant les règles usuelles de l'algèbre.
— L'équation $z^2 = -1$ admet au moins une solution sur $A$.

On note i une solution de cette équation.

**Définition 1.1**

On appelle corps des nombres complexes et on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres $x + \mathrm{i}y$ où $x$ et $y$ sont réels.

**Remarques**

- ⇨ $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, tout nombre réel est un nombre complexe.
- ⇨ $\mathbb{C}$ est stable par les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication.

**Définition 1.2**

Pour tout nombre complexe $z$, il existe un unique couple de réels $(x, y)$ tel que $z = x + \mathrm{i}y$. Les réels $x$ et $y$ sont respectivement appelés *partie réelle* et *partie imaginaire* de $z$. On note

$$\mathrm{Re}(z) \coloneqq x \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \coloneqq y$$

et on a donc $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$.

**Remarques**

- ⇨ On appelle *forme cartésienne* de $z \in \mathbb{C}$, toute écriture de la forme $z = x+\mathrm{i}y$ où $x, y \in \mathbb{R}$. La proposition précédente affirme que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, une telle écriture existe et est unique.
- ⇨ Si $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ sont tels que
$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = x_2 + \mathrm{i}y_2,$$
alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$. On dit souvent qu'on procède par *identification*, mais cette terminologie est abusive. On utilise en fait l'unicité provenant de la proposition précédente.
- ⇨ Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct du plan. À tout nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$, on associe le point $M$ dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont $(x, y)$. On a donc
$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$
et on dit que $M$ a pour affixe $z$. Pout tout point $M$ du plan, il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ tel que $M$ a pour affixe $z$ ; on dit alors que $z$ est *l'affixe* du point $M$. On a ainsi identifié $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des points du plan.
- ⇨ Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. On dit qu'un nombre complexe est *imaginaire pur* lorsque sa partie réelle est nulle. L'ensemble des nombres imaginaires purs est donc
$$\mathrm{i}\mathbb{R} \coloneqq \{\mathrm{i}y : y \in \mathbb{R}\}.$$
- ⇨ De même qu'on ne peut pas écrire d'inégalités entre les points du plan, les inégalités entre nombres complexes n'ont aucun sens.

**Proposition 1.3**

Un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

**Proposition 1.4**

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Alors
- — $\mathrm{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathrm{Re}(z) + \mu\,\mathrm{Re}(z')$,
- — $\mathrm{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda\,\mathrm{Im}(z) + \mu\,\mathrm{Im}(z')$.

**Remarque**

- ⇨ Attention, l'identité $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$ est fausse. Par exemple $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}) = -1$ et $\mathrm{Re}(\mathrm{i})\,\mathrm{Re}(\mathrm{i}) = 0$.

**Définition 1.5**

Soit $z$ un nombre complexe. On appelle *conjugué* de $z$ et on note $\overline{z}$ le nombre complexe

$$\overline{z} \coloneqq x - \mathrm{i}y$$

où $x$ et $y$ sont respectivement la partie réelle et imaginaire de $z$.

**Remarque**

- ⇨ Si $M$ est le point d'affixe $z \in \mathbb{C}$, le point $M'$ d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de $M$ par rapport à l'axe $(Ox)$.

**Proposition 1.6**

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}', \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z}', \quad \text{et} \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

**Définition 1.7**

Soit $z$ un nombre complexe. On appelle *module* de $z$ et on note $|z|$ le nombre réel positif
$$|z| \coloneqq \sqrt{x^2 + y^2}$$
où $x$ et $y$ sont respectivement la partie réelle et imaginaire de $z$.

**Remarques**

⇨ Si $x \in \mathbb{R}$ est considéré comme un nombre complexe, son module est égal à sa valeur absolue.

⇨ Si $M$ est le point d'affixe $z$, le module de $z$ est la distance $OM$. Si $A$ et $B$ sont deux points d'affixes respectives $a$ et $b$, alors $AB = |b - a|$.

⇨ Si $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$
— $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$ est le *cercle* de centre $a$ et de rayon $r$.
— $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leqslant r\}$ est le *disque fermé* de centre $a$ et de rayon $r$.
— $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est le *disque ouvert* de centre $a$ et de rayon $r$.

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels qu'au moins l'un des deux réels $a, b$ est non nul. Alors, l'ensemble d'équation
$$ax + by + c = 0$$
est une droite orthogonale au vecteur de coordonnées $(a, b)$.

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors l'ensemble d'équation
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$
est soit un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.

**Définition 1.8**

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

**Remarque**

⇨ L'identification entre $\mathbb{C}$ et le plan complexe nous amène à identifier $\mathbb{U}$ avec le cercle de centre $O$ et de rayon 1, appelé *cercle trigonométrique*.

**Proposition 1.9**

Soit $z$ un nombre complexe. Alors
$$|z|^2 = z\overline{z}.$$
De plus, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

**Remarque**

⇨ Afin d'exploiter cette identité, on cherchera souvent à travailler avec le carré des modules.

**Proposition 1.10**

Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors
$$|zz'| = |z|\,|z'| \quad \text{et} \quad |\overline{z}| = |z|.$$

**Proposition 1.11**

Si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes tels que $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$. On dit que $\mathbb{C}$ est *intègre*.

**Proposition 1.12**

Soit $z$ un nombre complexe non nul. Alors il existe un unique nombre complexe $z'$ tel que $zz' = 1$. On note ce nombre $z^{-1}$ ou $1/z$. De plus

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

**Remarques**

⇨ Pour obtenir $1/z$ sous forme cartésienne, il suffit de multiplier son numérateur et son dénominateur par $\overline{z}$.

⇨ Si $z \in \mathbb{U}$, alors $1/z = \overline{z}$. Pour inverser un nombre complexe de module 1, il suffit donc de le conjuguer.

**Exercice 1**

⇨ Calculer l'inverse de $1 + \mathrm{i}$.

**Proposition 1.13**

Soit $z$ un nombre complexe non nul. Alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$$

**Exercice 2**

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer que

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1.$$

**Proposition 1.14**

Soit $z$ un nombre complexe. Alors

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}.$$

En particulier

— $z$ est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.

— $z$ est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

**Remarque**

⇨ En pratique, pour montrer qu'un nombre complexe est réel, une bonne méthode est de montrer qu'il est égal à son conjugué. La méthode consistant à montrer que sa partie imaginaire est nulle est à proscrire.

**Exercices 3**

⇨ Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$. Montrer que

$$\frac{a+b}{1+ab}$$

est un nombre réel.

⇨ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ pour que

$$\frac{z+2}{1+\mathrm{i}z}$$

soit réel.

## 1.2 Inégalité triangulaire

**Proposition 1.15**

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors

$$\mathrm{Re}(a) \leqslant |\mathrm{Re}(a)| \leqslant |a| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(a) \leqslant |\mathrm{Im}(a)| \leqslant |a|.$$

De plus, $\mathrm{Re}(a) = |a|$ si et seulement si $a$ est réel positif.

**Proposition 1.16: Inégalité triangulaire**

Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes. Alors

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si $a$ et $b$ sont positivement liés, c'est-à-dire lorsque $a = 0$ ou lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $b = \lambda a$.

**Remarques**

⇨ Si $(ABC)$ est un triangle, alors $AC \leqslant AB + BC$. En effet, si on note $a$, $b$, $c$ les affixes respectives de $A$, $B$, $C$

$$AC = |c-a| = |c-b+b-a| \leqslant |c-b| + |b-a| = BC + AB.$$

Cette inégalité explique le nom d'inégalité triangulaire donné à la proposition précédente.

⇨ Attention, il est possible que $a$ et $b$ soient positivement liés sans qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $b = \lambda a$.

**Proposition 1.17: Seconde inégalité triangulaire**

Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes. Alors

$$||a| - |b|| \leqslant |a+b|.$$

**Remarque**

⇨ La seconde inégalité triangulaire admet plusieurs variantes.
- Si on remplace $b$ par $-b$, on obtient l'inégalité

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|$$

qui affirme que deux nombres complexes proches ont des modules proches.
- En remarquant que si $x$ est réel, $|x| \geqslant x$, on obtient

$$|a+b| \geqslant |a| - |b|.$$

Cette inégalité affirme que si $b$ a un module petit par rapport à celui de $a$, alors $a+b$ est éloigné de 0.

**Exercices 4**

⇨ Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes distincts. On pose $\delta \coloneqq |a-b|$. Montrer que les disques ouverts de centre $a$ et $b$ et de rayon $\delta/2$ sont disjoints.

⇨ Que peut-on dire de $|z|$ si $|1-z| \leqslant 1/4$ ? Faire un dessin puis une preuve.

**Proposition 1.18**

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

## 1.3 Puissance entière, binôme de Newton

**Définition 1.19**

Soit $a \in \mathbb{C}$. On définit $a^n$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ en posant
- $a^0 \coloneqq 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a^{n+1} \coloneqq a^n a$.

**Remarque**

⇨ En particulier, $0^0 = 1$.

**Proposition 1.20**

Soit $a, b$ deux nombres complexes, $n$ et $m$ deux entiers naturels. Alors

$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^{n+m} = a^n a^m \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

**Proposition 1.21**

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors
$$\overline{a^n} = \overline{a}^n \quad \text{et} \quad |a^n| = |a|^n .$$

**Exercice 5**

⇨ Montrer que si $P(z) := a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ est un polynôme à coefficients réels, l'ensemble de ses racines est stable par conjugaison.

**Définition 1.22**

Soit $a$ un nombre complexe non nul. On étend la définition de $a^n$ à $n \in \mathbb{Z}$ en posant
$$a^n := \frac{1}{a^{-n}}$$
lorsque $n < 0$.

**Proposition 1.23**

Soit $a, b$ deux nombres complexes non nuls, $n$ et $m$ deux entiers relatifs. Alors
$$(ab)^n = a^n b^n, \quad a^{n+m} = a^n a^m \quad \text{et} \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

**Proposition 1.24**

Soit $a$ un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{Z}$. Alors
$$\overline{a^n} = \overline{a}^n \quad \text{et} \quad |a^n| = |a|^n .$$

**Définition 1.25: Division euclidienne**

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que
$$a = qb + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < b.$$
$q$ est appelé *quotient* de la division euclidienne de $a$ par $b$, $r$ son *reste*.

**Exercice 6**

⇨ On pose $\mathrm{j} := -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer $\mathrm{j}^3$, puis en déduire $\mathrm{j}^{2023}$.

**Définition 1.26**

Pour tout entier naturel $n$, on définit la *factorielle* de $n$ que l'on note $n!$ par
- $0! := 1$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! := (n+1)\, n!$.

**Remarque**

⇨ Si $n \in \mathbb{N}^*$
$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

**Définition 1.27**

Pour tout couple $(k, n)$ d'entiers naturels, on définit $\binom{n}{k}$ que l'on prononce « $k$ parmi $n$ », comme étant le nombre de parties à $k$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments.

**Remarques**

⇨ Si $k > n$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

⇨ Si $n \in \mathbb{N}$, alors
$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

**Proposition 1.28**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

**Proposition 1.29: Relation de Pascal**

Soit $k$ et $n$ deux entiers naturels. Alors
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

**Remarque**

⇨ Cette formule est appelée relation de Pascal. Elle permet de calculer efficacement les $\binom{n}{k}$ en construisant le triangle de Pascal. Dans ce tableau contenant les $\binom{n}{k}$, où $n$ désigne la ligne et $k$ désigne la colonne, on commence par placer une colonne de 1 indiquant le fait que $\binom{n}{0} = 1$, puis une diagonale de 1 indiquant le fait que $\binom{n}{n} = 1$. Les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls et ne sont généralement pas représentés. Ceux en dessous de la diagonale sont complétés, ligne après ligne en utilisant la relation de Pascal qui affirme que chaque coefficient est la somme du coefficient se situant au-dessus de lui et de celui au-dessus à gauche.

$$\begin{array}{cccccc} 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Ce triangle permet par exemple de lire sur la dernière ligne que $\binom{5}{1} = 5$ et $\binom{5}{2} = 10$.

**Proposition 1.30**

Soit $n$ un entier naturel et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

**Remarques**

⇨ On peut simplifier l'écriture de $\binom{n}{k}$ en
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\cdots(n-(k-1))}^{k \text{ termes}}}{k!}.$$

En particulier
$$\binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}.$$

⇨ Si $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a la formule dite « du capitaine »
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

**Exercice 7**

⇨ Soit $k, n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}.$$

**Proposition 1.31: Binôme de Newton**

Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes et $n$ un entier naturel. Alors
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

**Exercice 8**

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

**Proposition 1.32**

Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes. Alors

— $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

— Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right). \end{aligned}$$

**Proposition 1.33**

Soit $a$ un nombre complexe et $n$ un entier naturel. Alors
$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

# 2 Forme trigonométrique

## 2.1 Exponentielle $\mathrm{i}\theta$

**Définition 2.1**

Pour tout réel $\theta$, on définit l'exponentielle de $\mathrm{i}\theta$ par
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} := \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

**Proposition 2.2**

Soit $\theta_1$ et $\theta_2$ deux réels. Alors
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$

**Proposition 2.3**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors
$$\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}.$$
De plus, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est non nul et si $n \in \mathbb{Z}$, alors
$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n.$$

**Proposition 2.4: Formules d'Euler et Moivre**

Soit $\theta$ un réel. Alors les formules d'Euler s'écrivent
$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$
Pour $n \in \mathbb{Z}$, la formule de Moivre nous donne
$$\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n.$$

**Proposition 2.5**

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$ si et seulement si $\theta \equiv 0 \ [2\pi]$.
- Plus précisément, étant donnés $\theta_1$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$ si et seulement si $\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]$.

**Exercice 9**

⇨ Déterminer la partie réelle de
$$\frac{1}{1-\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}.$$

**Proposition 2.6: Paramétrisation de $\mathbb{U}$ par « l'exponentielle $\mathrm{i}\theta$ »**

L'application qui à $\theta$ associe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Autrement dit :
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}$.
- Pour tout $u \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

## 2.2 Application à la trigonométrie

**Applications**

⇨ *Factorisation par l'arc moitié*
Étant donné un réel $\theta$
$$\begin{aligned} 1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$
De même
$$\begin{aligned} 1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= -2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}. \end{aligned}$$
Plus généralement, étant donnés $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right) = 2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}.$$

⇨ *Calcul de sommes trigonométriques*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$C_n := \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n := \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

⇨ *Linéarisation de* $\cos^n\theta\sin^m\theta$
Étant donné deux entiers naturels $n$ et $m$, on cherche à exprimer $\cos^n\theta\sin^m\theta$ comme combinaison linéaire des $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, on peut utiliser les formules d'Euler avant de développer l'expression par la formule du binôme de Newton et de regrouper les termes en utilisant à nouveau les formules d'Euler. Cette opération sera utile lors du calcul de primitives.
**Exemple :** Linéariser $\sin^6\theta$ et $\sin\theta\cos^4\theta$.

⇨ *Expression de* $\cos(n\theta)$ *et* $\sin(n\theta)$ *comme polynôme en* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$
Pour cette opération, une méthode consiste à utiliser la formule de Moivre avant de développer l'expression obtenue à l'aide du binôme de Newton.
**Exemple :** Exprimer $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$.

**Exercices 10**

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta).$$

⇨ En exprimant $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$, montrer que $\cos(\pi/10)$ est racine d'un polynôme à coefficients entiers. En déduire une expression de $\cos(\pi/10)$ à l'aide de radicaux.

## 2.3 Forme trigonométrique

**Définition 2.7**

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle *forme trigonométrique* de $z$ toute écriture

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

**Remarques**

- Si $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est une forme trigonométrique, alors $r = |z|$.
- Tout nombre complexe non nul admet une forme trigonométrique. En pratique, pour la déterminer, on force la factorisation de $z$ par $|z|$ et on écrit le second terme sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
- Il existe deux moyens de représenter un même nombre complexe : la forme cartésienne et la forme trigonométrique. La première est particulièrement adaptée aux calculs de sommes, tandis que la seconde est particulièrement adaptée aux calculs de produits.

**Exercices 11**

- Mettre $-2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
- Mettre sous forme trigonométrique
$$\left(\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}.$$

**Définition 2.8**

On appelle *argument* de $z \in \mathbb{C}^*$ tout réel $\theta$ tel que

$$z = |z|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

**Proposition 2.9**

Tout nombre complexe non nul $z \in \mathbb{C}^*$ admet au moins un argument. Si $\theta$ est l'un de ses arguments, l'ensemble de ses arguments est $\theta + 2\pi\mathbb{Z} := \{\theta + k2\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. On écrit

$$\arg(z) \equiv \theta \ \ [2\pi]\,.$$

**Remarques**

- Soit $r_1, r_2 > 0$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Alors
$$r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} = r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$$
si et seulement si $r_1 = r_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2$ $[2\pi]$. Contrairement à la forme cartésienne, il n'y a donc pas unicité de la forme trigonométrique.
- Si $z$ est un nombre complexe non nul, il existe un unique $\theta \in \,]-\pi, \pi]$ tel que $\arg z \equiv \theta$ $[2\pi]$. On dit que $\theta$ est l'*argument principal* de $z$ et on le note $\mathrm{Arg}(z)$.
- Étant donné un nombre complexe $z$, on appelle *forme trigonométrique généralisée* de $z$ toute écriture du type $z = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Attention, même si $z \neq 0$, on n'a pas nécessairement $\arg z \equiv \theta$ $[2\pi]$. En effet :
  - Si $\rho > 0$, alors $\rho = |z|$ et $\arg z \equiv \theta$ $[2\pi]$.
  - Si $\rho < 0$, alors $\rho = -|z|$ et $\arg z \equiv \theta + \pi$ $[2\pi]$.

  Lorsque l'énoncé demandera explicitement de mettre un nombre complexe sous forme trigonométrique, c'est bien sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ qu'il faudra le mettre. Cependant, lorsqu'on demandera de mettre $z$ sous forme trigonométrique pour conduire des calculs, une forme trigonométrique généralisée suffira le plus souvent.

**Exercices 12**

- Résoudre l'équation
$$z^2 = \overline{z}$$
en utilisant la forme cartésienne, puis la forme trigonométrique de $z$.
- Résoudre l'équation $z^5 = 1/\overline{z}$.

**Proposition 2.10**

Soit $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \ \ [2\pi]\,, \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \ \ [2\pi]\,,$$

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \ \ [2\pi] \,, \qquad \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \ [2\pi].$$

**Remarque**

⇨ En général, $\mathrm{Arg}(zz') \neq \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z')$. Par exemple $\mathrm{Arg}((-1)(-1)) = 0$ et $\mathrm{Arg}(-1) + \mathrm{Arg}(-1) = 2\pi$.

## 2.4 Exponentielle complexe

**Définition 2.11**

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où $x$ et $y$ sont respectivement la partie réelle et imaginaire de $z$. On appelle exponentielle de $z$ et on note $\mathrm{e}^z$ le nombre complexe défini par

$$\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y) \,.$$

**Proposition 2.12**

Soit $z$ et $z'$ deux nombres complexes. Alors

$$\mathrm{e}^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'}.$$

**Proposition 2.13**

Soit $z$ un nombre complexe, et $n \in \mathbb{Z}$ . Alors $\mathrm{e}^z$ est non nul,

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{nz} = (\mathrm{e}^z)^n \,.$$

**Proposition 2.14**

Soit $z$ un nombre complexe. Alors

$$\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}, \qquad |\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \qquad \text{et} \qquad \arg(\mathrm{e}^z) \equiv \mathrm{Im}(z) \ [2\pi].$$

**Proposition 2.15**

- Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $\mathrm{e}^z = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \mathrm{i}k2\pi$.
- Plus précisément, étant donnés $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes, $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + \mathrm{i}k2\pi$.

**Proposition 2.16**

L'exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. Autrement dit :
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z \in \mathbb{C}^*$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^{z'} = z$.

**Remarque**

⇨ Si $z \in \mathbb{C}^*$, nous venons de voir qu'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $e^{z'} = z$. Cependant, $z'$ n'est pas unique, ce qui nous empêche de définir le logarithme de $z$. Par contre, on peut montrer qu'il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^{z'} = z$ et $\mathrm{Im}(z') \in \,]-\pi, \pi]$. Ce nombre est appelé logarithme principal de $z$ et noté $\mathrm{Ln}(z)$. De plus $\mathrm{Ln}(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}(z)$. C'est le logarithme calculé par les logiciels de calcul formel ainsi que vos calculatrices. Malheureusement, l'identité $\mathrm{Ln}\,(zz') = \mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(z')$ est fausse ; elle n'est vraie que modulo $\mathrm{i}2\pi$. C'est pourquoi, nous n'emploierons jamais de logarithme avec les nombres complexes.

**Exercice 13**

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^z = \sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

# 3 Racines d'un nombre complexe

## 3.1 L'équation du second degré

**Définition 3.1**

Soit $a$ un nombre complexe. On appelle *racine* de $a$ tout nombre complexe $z$ tel que

$$z^2 = a.$$

**Remarques**

⇨ Si $a$ est un réel positif, les racines de $a$ sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Si $a$ est un réel négatif, ses racines sont $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

⇨ Si $a \in \mathbb{C}$, on parlera de racine de $a$, mais on n'écrira jamais $\sqrt{a}$. Cette notation est réservée aux réels positifs.

**Proposition 3.2**

Soit $a$ un nombre complexe non nul. Alors $a$ admet exactement deux racines distinctes opposées l'une à l'autre.

**Remarque**

⇨ En pratique, pour trouver les racines d'un nombre complexe $a$, on procède ainsi

— *Si $a$ s'exprime facilement sous forme trigonométrique.* On connait donc $r > 0$ et $\theta$ tels que $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Alors les racines de $a$ sont $\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

— *Si $a$ est sous forme cartésienne et qu'il n'est pas simple de le mettre sous forme trigonométrique.* On recherche les racines de $a$ sous la forme $z := x + \mathrm{i}y$ en effectuant une analyse : on suppose que $z$ est une racine de $a$ et on exploite le fait que $|z|^2 = |a|$ et que $z^2$ et $a$ ont même partie réelle. On obtient donc

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= |a|\,, \\ x^2 - y^2 &= \mathrm{Re}(a). \end{aligned}$$

En résolvant ce système linéaire en $x^2$ et $y^2$, on obtient 4 couples $(x, y)$ de solutions parmi lesquelles se trouvent les racines de $a$. Un argument de signe sur les parties imaginaires de $z^2$ et $a$ permet d'éliminer deux candidats. La proposition précédente nous assure que les deux candidats restants sont bien des racines de $a$.

**Exercices 14**

⇨ Calculer les racines carrées de $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

⇨ Calculer les racines de $1 + \mathrm{i}$ de deux manières différentes. En déduire une expression avec des radicaux emboîtés de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$ et $\tan(\pi/8)$.

**Proposition 3.3**

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0.$$

On appelle discriminant de $(E)$ le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta \neq 0$, le trinôme admet deux racines distinctes

$$z_1 := \frac{-b + \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b - \delta}{2a}.$$

où $\delta$ est une racine carrée de $\Delta$.

— Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une seule racine, appelée racine double

$$z_0 := -\frac{b}{2a}.$$

**Remarque**

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$(E) \qquad az^2 + bz + c = 0.$$

— Si $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$$z_1 := \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

— Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une seule racine réelle, appelée racine double

$$z_0 := -\frac{b}{2a}.$$

— Si $\Delta < 0$, le trinôme admet deux racines complexes conjuguées

$$z_1 := \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 := \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

**Exercice 15**

⇨ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.

**Proposition 3.4**

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et $z_1, z_2$ deux nombres complexes. Alors $z_1$ et $z_2$ sont les deux racines, éventuellement égales, de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

**Remarque**

⇨ Si $P, S \in \mathbb{C}$, les solutions du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P, \end{cases}$$

sont $(\omega_1, \omega_2)$ et $(\omega_2, \omega_1)$ où $\omega_1$ et $\omega_2$ sont les racines du trinôme $z^2 - Sz + P = 0$.

**Exercices 16**

⇨ Déterminer les solutions de l'équation $3z^2 - 5z + 2 = 0$.

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 3 - 2\mathrm{i} \\ uv = 3 + \mathrm{i}. \end{cases}$$

## 3.2 Racines $n$-ièmes

**Définition 3.5**

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$, on appelle *racine $n$-ième* de $a$ tout nombre complexe $z$ tel que $z^n = a$. Les racines $n$-ièmes de 1 sont appelées *racines $n$-ièmes de l'unité* et l'ensemble de ces racines est noté $\mathbb{U}_n$.

**Remarque**

⇨ Les racines $n$-ièmes de 1 sont de module 1. Autrement dit, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.

**Proposition 3.6**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement $n$ racines $n$-ièmes de l'unité. En posant $\omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, ce sont

$$1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}.$$

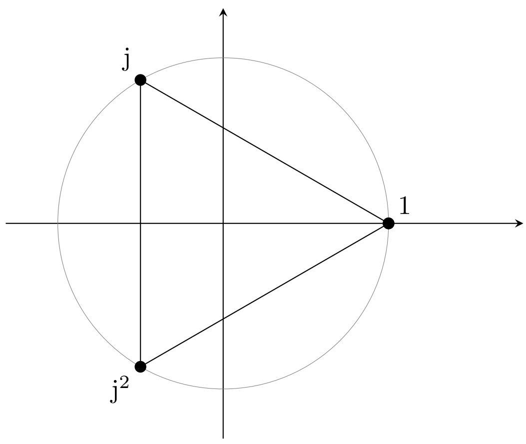
**Remarques**

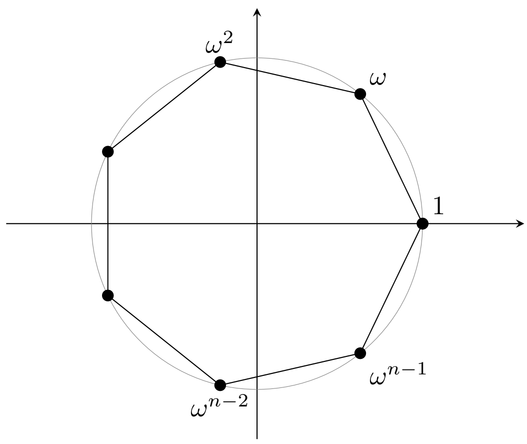
⇨ Lorsque l'on doit calculer sur des racines $n$-ièmes, il est souvent plus efficace de les manipuler via leur propriété ($z^n = 1$) plutôt que par leur description ($z = \omega^k$). On ne se rabat sur la description que lorsque la relation $z^n = 1$ ne suffit pas, ou en toute fin de calcul.

⇨ Dans le cas où $n = 3$, $\omega$ est noté $\mathrm{j}$. Les racines 3-ièmes de l'unité sont donc $1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2$. Lorsqu'on travaille avec le nombre complexe $\mathrm{j}$, on exploite les relations

$$\mathrm{j}^3 = 1, \qquad 1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathrm{j}} = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2.$$

⇨ Les racines $n$-ièmes de l'unité forment un polygone régulier à $n$ côtés.






**Exercices 17**

⇨ Que dire de deux nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $a^3 = b^3$ ?

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z+1)^n = (z-1)^n .$$

⇨ Calculer
$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1| .$$

**Proposition 3.7**

Soit $n \geqslant 2$ et $\zeta$ une racine $n$-ième de l'unité, différente de 1. Alors
$$1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$
En particulier, la somme des racines $n$-ièmes de l'unité est nulle.

**Proposition 3.8**

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $a$ admet exactement $n$ racines $n$-ièmes. En posant $\omega := \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$, si $z_0$ est une racine $n$-ième de $a$, les racines $n$-ièmes de $a$ sont
$$z_0, \omega z_0, \ldots, \omega^{n-1} z_0.$$

**Remarques**

⇨ Si $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est sous forme trigonométrique, alors
$$z_0 = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}$$
est une racine $n$-ième de $a$.

⇨ Si $n \geqslant 2$, la somme des racines $n$-ièmes d'un nombre complexe est nulle.

**Exercices 18**

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation
$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0.$$

⇨ En considérant les racines 7-ièmes de $-1$, montrer que
$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

# 4 Nombres complexes et géométrie plane

## 4.1 Le plan complexe

**Définition 4.1**

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien orienté et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ un repère orthonormé direct.

— Si $M$ est un point du plan de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$

on appelle *affixe* de $M$ le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.

— Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}$$

on appelle *affixe* de $\overrightarrow{u}$ le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$.

**Remarque**

⇨ Si $M$ est un point du plan, son affixe est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

**Proposition 4.2**

— Soit $A$ et $B$ deux points du plan d'affixes respectives $a$ et $b \in \mathbb{C}$. Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

— Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $u$ et $v \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda\,\overrightarrow{u} + \mu\,\overrightarrow{v}$ a pour affixe $\lambda u + \mu v$.

**Proposition 4.3**

— Soit $a$ et $b$ deux nombres complexes. Alors $|a - b|$ est la distance entre les points d'affixes $a$ et $b$.

— Soit $u$ un nombre complexe. Alors $|u|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$.

**Proposition 4.4**

Soit $A, B, C$ trois points deux à deux distincts d'affixes respectives $a, b, c$. Alors

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \ [2\pi].$$

**Proposition 4.5**

Soit $A, B, C$ trois points deux à deux distincts d'affixes respectives $a, b, c$. Alors

— $A, B, C$ sont alignés si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

— $(AB)$ et $(AC)$ sont orthogonales si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

**Remarques**

⇨ Soit $A$, $B$, $C$ trois points d'affixes respectives $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$. Si $A$, $B$, $C$ sont deux à deux distincts, alors

$$\begin{aligned} A,\ B,\ C \text{ sont alignés} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{c-a}{b-a} = \overline{\left(\frac{c-a}{b-a}\right)} \\ &\Longleftrightarrow \quad (c-a)\overline{(b-a)} = \overline{(c-a)}(b-a). \end{aligned}$$

On vérifie facilement que même si $A$, $B$, $C$ ne sont pas deux à deux distincts

$$A,\ B,\ C \text{ sont alignés} \quad \Longleftrightarrow \quad (c-a)\overline{(b-a)} = \overline{(c-a)}(b-a).$$

⇨ La proposition précédente étant essentiellement utilisée de cette manière, on pourra tolérer exceptionnellement de l'appliquer, même si $A$, $B$, $C$ ne sont pas deux à deux distincts. Ce genre de « division par zéro » est parfois tolérée en géométrie. Bien entendu, dans tout autre domaine des mathématiques, ces horreurs ne seront pas tolérées.

**Exercice 19**

⇨ Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. On construit $A_1$ extérieur au quadrilatère tel que le triangle $BA_1C$ est isocèle et rectangle en $A_1$. De même pour $B_1, C_1, D_1$. Montrer que les segments $[A_1C_1]$ et $[D_1B_1]$ ont même longueur et sont orthogonaux.

## 4.2 Les similitudes directes

**Définition 4.6**

Soit $\vec{u}$ un vecteur. On appelle *translation* de vecteur $\vec{u}$ l'application qui au point $M$ associe l'unique point $M'$ tel que
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

**Proposition 4.7**

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe $u \in \mathbb{C}$. La translation de vecteur $\vec{u}$ transforme le point $M$ d'affixe $z$ en le point $M'$ d'affixe
$$z' = z + u.$$

**Remarque**

⇨ Une translation conserve les distances et les angles.

**Définition 4.8**

Soit $\Omega$ un point du plan et $\rho \in \mathbb{R}^*$. On appelle *homothétie* de centre $\Omega$ et de rapport $\rho$ l'application qui au point $M$ associe l'unique point $M'$ tel que
$$\overrightarrow{\Omega M'} = \rho\overrightarrow{\Omega M}.$$

**Proposition 4.9**

Soit $\Omega$ un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\rho \in \mathbb{R}^*$. L'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\rho$ transforme le point $M$ d'affixe $z$ en le point $M'$ d'affixe
$$z' = \rho(z - \omega) + \omega.$$

**Remarque**

⇨ Une homothétie de rapport $\rho \in \mathbb{R}^*$ multiplie les distances par $|\rho|$ et conserve les angles.

**Définition 4.10**

Soit $\Omega$ un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *rotation* de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ l'application qui au point $M$ associe

- $\Omega$ si $M = \Omega$.
- l'unique point $M'$ tel que
$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \ [2\pi]$$
sinon.

**Proposition 4.11**

Soit $\Omega$ un point du plan d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ transforme le point $M$ d'affixe $z$ en le point $M'$ d'affixe
$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

**Remarque**

⇨ Une rotation conserve les distances et les angles.

**Exercice 20**

⇨ Quelle est l'expression en notation complexe des transformations suivantes ?
- **a.** La symétrie centrale de centre 0.
- **b.** L'homothétie de centre 0 et de rapport 2.
- **c.** L'homothétie de centre 2 et de rapport 1/2.
- **d.** La composée des deux dernières transformations.
- **e.** La rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$.
- **f.** La rotation de centre $1 + \mathrm{i}$ et d'angle $\pi/2$.
- **g.** La composée des deux dernières transformations.
- **h.** La symétrie orthogonale d'axe $(Ox)$.
- **i.** La symétrie orthogonale dont l'axe $\mathcal{D}_\theta$ fait un angle $\theta$ avec l'axe $(Ox)$.

**Définition 4.12**

Soit $\Omega$ un point du plan, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *similitude* de centre $\Omega$, de rapport $r$ et d'angle $\theta$ la composée (commutative) de l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $r$ et de la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$.

**Proposition 4.13**

Soit $\Omega$ un point du plan d'affixe $\omega$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La similitude de centre $\Omega$, de rapport $r$ et d'angle $\theta$ transforme le point $M$ d'affixe $z$ en le point $M'$ d'affixe

$$z' = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

**Remarques**

⇨ Si $\rho < 0$, l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\rho$ est une similitude de centre $\Omega$, de rapport $|\rho|$ et d'angle $\pi$.

⇨ Une similitude de rapport $r > 0$ et d'angle $\theta$ multiplie les distances par $r$ et conserve les angles.

Dans la suite, on confondra un point et son affixe, un vecteur et son affixe. On identifie ainsi le plan à $\mathbb{C}$.

**Définition 4.14**

On appelle *similitude directe* toute application $f$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

**Remarque**

⇨ Les translations et les similitudes de centre $\Omega$ de rapport $r \in \mathbb{R}_+^*$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ sont des similitudes directes. Nous allons voir que ce sont les seules.

**Proposition 4.15**

La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

**Proposition 4.16**

Soit $f$ une similitude directe et $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

- Si $a = 1$, $f$ est la translation de vecteur $b$.
- Sinon, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $a = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. $f$ admet un unique point fixe $\omega$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega) + \omega.$$

  Autrement dit $f$ est la similitude de centre $\omega$, de rapport $r$ et d'angle $\theta$.

**Exercice 21**

⇨ À quelle transformation géométrique correspond la fonction $f : z \mapsto (3 - \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}z$ ?