Matrices

Table des matières

1 Matrice, vecteur et application linéaire

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 1.1

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$. On appelle *matrice* de x relativement à la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice colonne constituée des coordonnées de x relativement à la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, si $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Exercice 1

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathcal{B} := \left(1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n\right)$. Donner la matrice de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Proposition 1.2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & x & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque

⇨ Dans le cas où $E := \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ est sa base canonique, l'application Φ associe au vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ la matrice colonne

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Cet isomorphisme justifie l'identification souvent faite entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Cependant, lorsque E est différent de $\mathbb{K}^n$, on se gardera bien de confondre $x \in E$ avec la matrice colonne $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$.

Définition 1.3

Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. On appelle matrice de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ la matrice à n lignes et p colonnes dont les vecteurs colonnes C_j sont les coordonnées des vecteurs x_j relativement à la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ des coefficients de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_p)$ est caractérisée par

$$\forall j\in [\![1,p]\!]\,,\quad x_j=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i.$$

Exercice 2

⇨ Donner la matrice de la famille $((X+1)^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 1.4

Soit $\mathcal{B}_E \coloneqq (e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F \coloneqq (f_1,\dots,f_q)$ une base de F. Étant donné $u\in\mathcal{L}(E,F)$, on appelle *matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$* et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}_E}(u)$ la matrice à q lignes et p colonnes de la famille $(u(e_1),\dots,u(e_p))$ relativement à la base $\mathcal{B}_F$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}_E}(u)\coloneqq \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1),\dots,u(e_p)).$$

Autrement dit, la famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ des coefficients de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}_E}(u)$ est caractérisée par

$$\forall j\in [\![1,p]\!]\,,\quad u(e_j)=\sum_{i=1}^{q} a_{i,j}f_i.$$

Remarques

⇨ La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F\leftarrow\mathcal{B}_E}(u)$ est parfois notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ ou $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(u)$.

⇨ Si $E=F$, on choisit le plus souvent $\mathcal{B}_E=\mathcal{B}_F$, bien que cela ne soit pas obligatoire. Dans ce cas on parle de la matrice de l'endomorphisme u relativement à la base $\mathcal{B}_E$. Cette matrice est notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(u)$.

⇨ Soit $\mathcal{B}\coloneqq(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $u\in\mathcal{L}(E)$.

1. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est scalaire si et seulement si u est une homothétie.
2. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)=\operatorname{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ si et seulement si
$$\forall k\in[\![1,n]\!]\,,\quad u(e_k)=\lambda_k e_k.$$
3. Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on note $E_k\coloneqq\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_k)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si
$$\forall k\in[\![1,n]\!]\,,\quad u(E_k)\subset E_k.$$
Par exemple, si $E\coloneqq\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ est sa base canonique, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si
$$\forall P\in\mathbb{K}_n[X],\quad \deg(u(P))\leqslant\deg P.$$

⇨ Soit p un projecteur de E, $A\coloneqq\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id})$ et $B\coloneqq\operatorname{Ker}p$. Puisque p est un projecteur, $E=A\oplus B$. Soit $(e_1,\dots,e_q)$ une base de A et $(e_{q+1},\dots,e_n)$ une base de B. Alors $\mathcal{B}\coloneqq(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E. Comme

$$\forall k\in[\![1,q]\!]\,,\quad p(e_k)=e_k\qquad\text{et}\qquad\forall k\in[\![q+1,n]\!]\,,\quad p(e_k)=0$$

on en déduit que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)=\begin{pmatrix} I_q & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Exercices 3

⇨ Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ ainsi qu'une base de $\operatorname{Im}\varphi$.

⇨ Calculer la matrice de l'application linéaire

$$\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}_n[X]\\ P&\longmapsto&P(X+1)\end{array}$$

relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Proposition 1.5

Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F. Si on note $p \coloneqq \dim E$ et $q \coloneqq \dim F$, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarque

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il existe donc une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = A$.

Proposition 1.6

— Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x \in E$. Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

— Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Si $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F et G, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_E}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_F}(v)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u).$$

Remarque

⇨ Si $E \coloneqq \mathbb{K}^p$, $F \coloneqq \mathbb{K}^q$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont leurs bases canoniques, et $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = A$. On dit que c'est *l'application linéaire canoniquement associée à* A. En identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ (à la fois pour $n = p$ et $n = q$), pour tout $x \in \mathbb{K}^p$, $u(x) = Ax$. On a alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} A$, où le noyau et l'image de la matrice A ont été définis lors du premier chapitre sur les matrices.

Exercice 4

⇨ Retrouver le fait que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Proposition 1.7

Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme. De plus, si tel est le cas

$$[\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)]^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}_F}\left(u^{-1}\right).$$

Exercice 5

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i,j \in [\![1, n+1]\!], \quad a_{i,j} \coloneqq \binom{j-1}{i-1}.$$

est inversible et calculer son inverse.

Proposition 1.8

Soit $\mathcal{B}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est inversible si et seulement si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E.

Proposition 1.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Remarque

⇨ En conservant les mêmes notations, l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice 6

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties.

1.3 Matrice de passage, changement de base

Définition 1.10

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' := (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle *matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$* et on note $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice de la famille $(e'_1, \dots, e'_n)$ relativement à la base $\mathcal{B}$

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') := \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Proposition 1.11

— Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E).$$

— Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont des bases de E, alors

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') P(\mathcal{B}', \mathcal{B}'').$$

— Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est inversible et

$$[P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')]^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

Exercice 7

⇨ Soit $E := \mathbb{K}^2$ et $\mathcal{B} := (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$. On pose $f_1 := (5, 3)$ et $f_2 := (3, 2)$. Montrer que $\mathcal{B}' := (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{K}^2$, puis calculer $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Proposition 1.12

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors pour toute matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique base $\mathcal{B}'$ de E telle que $A = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Proposition 1.13

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x) = P(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x).$$

Proposition 1.14

Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}'_E}(u) &= P(\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F) \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) P(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E) \\ &= [P(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F)]^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) P(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E). \end{aligned}$$

Proposition 1.15

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) &= P(\mathcal{B}', \mathcal{B}) \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \\ &= [P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')]^{-1} \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'). \end{aligned}$$

1.4 Caractérisation des matrices inversibles

Proposition 1.16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

- A est inversible si et seulement si A est inversible à gauche, c'est-à-dire si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$. Si tel est le cas, $B = A^{-1}$ et en particulier $AB = I_n$.
- A est inversible si et seulement si A est inversible à droite, c'est-à-dire si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$. Si tel est le cas, $B = A^{-1}$ et en particulier $BA = I_n$.

Proposition 1.17

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0.$$

Remarque

⇨ Autrement dit, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonne est libre. Comme A est inversible si et seulement si $A^\top$ l'est, on en déduit que A est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs ligne est libre.

Proposition 1.18

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y \quad \Longrightarrow \quad X = BY.$$

De plus, si tel est le cas, B est l'inverse de A.

Remarque

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les coefficients d'un système linéaire à n équations et n inconnues. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que quels que soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \cdots + b_{1,n}y_n \\ \ \vdots \\ x_n = b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \cdots + b_{n,n}y_n. \end{cases}$$

Alors, quels que soient $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} x_1 \coloneqq b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \cdots + b_{1,n}y_n \\ \ \vdots \\ x_n \coloneqq b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \cdots + b_{n,n}y_n \end{cases}$$

est l'unique solution du système linéaire (S).

Exercices 8

⇨ Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est inversible et calculer son inverse.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ et $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$. Résoudre le système

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], \quad \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{ij} z_j = b_i.$$

Proposition 1.19

Une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k \neq 0.$$

Si tel est le cas

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

1.5 Rang d'une matrice

Définition 1.20

On définit le *rang* de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, que l'on note $\operatorname{rg} A$, comme étant le rang de la famille de ses vecteurs colonne.

Exercice 9

⇨ Montrer que les matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les $XY^\top$ où $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.

Proposition 1.21

— Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. Alors

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) = \operatorname{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)).$$

— Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)).$$

Proposition 1.22

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$.

Proposition 1.23

— Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{rg}(AB) \leqslant \operatorname{rg}(A) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(AB) \leqslant \operatorname{rg}(B).$$

— On ne change pas le rang d'une matrice si on la multiplie par la droite ou par la gauche par une matrice inversible.

Proposition 1.24

Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes transforment une matrice en une autre de même rang.

Proposition 1.25

Soit $E \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ une matrice échelonnée à coefficients diagonaux de la forme

$$\begin{pmatrix} p_1 & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & p_r & \star & \cdots \star \\ \vdots & & 0 & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}$$

où $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{K}^*$. Alors $\mathrm{rg}(E) = r$.

Remarques

- L'algorithme du pivot de Gauss permet de transformer toute matrice en une matrice échelonnée à pivots diagonaux et permet donc de calculer son rang.
- Les matrices échelonnées par lignes et par colonnes ont aussi un rang égal au nombre de pivots qu'elles possèdent.

Exercices 10

- Calculer le rang de $P_1 := X^2 + X + 1$, $P_2 := X^2 - X - 1$, $P_3 := X^2 + 3X + 2$.
- Calculer le rang de
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$$
où
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
- Calculer le rang de la famille $e_1 := (1, x, -1)$, $e_2 := (x, 1, x)$, $e_3 := (-1, x, 1)$ où $x \in \mathbb{R}$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice
$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$
- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
et $F := \mathrm{Vect}(A, B)$. Déterminer une base puis une équation de F.

Proposition 1.26

— Les opérations élémentaires sur les lignes transforment une matrice en une matrice de même noyau.
— Les opérations élémentaires sur les colonnes transforment une matrice en une matrice de même image.

Remarque

- Pour calculer une base de l'image d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il suffit donc de réduire A en une matrice échelonnée par colonnes à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes. Le nombre de colonnes non nulles est alors égal au rang de A et ces colonnes forment une base de $\mathrm{Im}\, A$.

Exercice 11

- Calculer une base de $\mathrm{Im}\, A$ pour
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

2 Matrices équivalentes, matrices semblables

2.1 Matrices équivalentes

Définition 2.1

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est *équivalente* à B lorsqu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que

$$A = QBP.$$

Proposition 2.2

La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Remarque

⇨ Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes transforment une matrice en une matrice équivalente.

Proposition 2.3

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, $\mathcal{B}_E$ une base de E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, $\mathcal{B}_F$ une base de F et u l'application linéaire de E dans F définie par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = A.$$

Alors $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à A si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'_E$ de E et une base $\mathcal{B}'_F$ de F telles que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}'_E}(u) = B.$$

Proposition 2.4

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Alors A est équivalente à la matrice

$$J_r := \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & r & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Remarques

⇨ En toute rigueur, une telle matrice devrait être notée $J_{r,q,p}$.

⇨ L'algorithme du pivot de Gauss permet le calcul effectif de $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que $PAQ = J_r$.

Exercice 12

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & XA \end{array}$$

Calculer le rang de φ en fonction de celui de A.

Proposition 2.5

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Proposition 2.6

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors $A^\top$ et A ont même rang.

Remarques

⇨ Le rang de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est donc égal à la fois au rang de la famille de ses vecteurs colonne et au rang de la famille de ses vecteurs ligne.

⇨ Attention, si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ n'est pas une matrice carrée, A et $A^\top$ ont même rang mais elles ne sont pas équivalentes. En effet, elles n'ont pas les mêmes dimensions.

Définition 2.7

On appelle *matrice extraite* de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ toute matrice obtenue en « supprimant » certaines lignes et certaines colonnes de A.

Exemple

⇨ Soit A et B les matrices

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{K}).$$

Alors B est une matrice extraite de A.

Proposition 2.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.
- Si B est une matrice extraite de A, alors $\mathrm{rg}(B) \leqslant \mathrm{rg}(A)$.
- Le rang de A est le plus grand entier r tel qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ extraite de A qui est inversible.

2.2 Matrices semblables

Définition 2.9

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *semblable* à B lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = PBP^{-1}.$$

Proposition 2.10

La relation « est semblable à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarques

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice scalaire, c'est la seule matrice semblable à elle-même.

⇨ Deux matrices semblables sont équivalentes. La réciproque est fausse.

⇨ Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & PXP^{-1} \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres. En particulier, si $A = PBP^{-1}$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1}$. Plus généralement, si $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A) = PQ(B)P^{-1}$.

Proposition 2.11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et u l'endomorphisme de E défini par

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A.$$

Alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = B.$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *valeur propre* de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, l'ensemble E_λ des $x \in E$ tels que $u(x) = \lambda x$ est appelé *espace propre* associé à la valeur propre λ et ses éléments sont appelés *vecteurs propres* de u associés à la valeur propre λ. Remarquons que $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.

Exercices 13

⇨ Déterminer les valeurs propres d'un projecteur non trivial, c'est-à-dire différent de 0 et de Id.

⇨ Soit $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs propres non nuls d'un endomorphisme u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u, c'est-à-dire lorsqu'il existe une base $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad u(e_k) = \lambda_k e_k.$$

On a alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale. Dans la suite, on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A$.

— *On commence par déterminer les valeurs propres de u.* Pour $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est valeur propre de } u &\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad u(x) = \lambda x \\
&\iff \exists x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad (u - \lambda \,\mathrm{Id})(x) = 0 \\
&\iff \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}) \neq \{0\} \\
&\iff u - \lambda \,\mathrm{Id} \text{ n'est pas injective} \\
&\iff u - \lambda \,\mathrm{Id} \text{ n'est pas un isomorphisme} \\
&\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible.}
\end{aligned}$$

Déterminer les valeurs propres de u revient donc à déterminer les $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, ce qui se fait simplement en calculant le rang de $A - \lambda I_n$ par la méthode du pivot de Gauss.

— Ensuite, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de u, *on détermine une base de l'espace propre* $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id})$.

— Enfin, *on concatène les bases des espaces propres ainsi obtenus*. On obtient alors une famille $\mathcal{V} \coloneqq (v_1, \dots, v_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}^n$. On commence par démontrer que cette famille est libre. On a ensuite deux possibilités :
  — Dans le cas où $p = n$, $\mathcal{V}$ est une base de $\mathbb{K}^n$. En posant $P \coloneqq P(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ et $D \coloneqq \mathcal{M}_{\mathcal{V}}(u)$, on a donc $A = PDP^{-1}$. D est une matrice diagonale, car les éléments de $\mathcal{V}$ sont des vecteurs propres de u. On a donc prouvé que A est diagonalisable.
  — Dans le cas où $p < n$, on peut montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exercice 14

⇨ Montrer que la matrice

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

est semblable à une matrice diagonale D et déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Proposition 2.12

Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, B$.

Définition 2.13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors la trace de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie. On l'appelle *trace* de u et on la note $\mathrm{tr}(u)$.

Remarque

⇨ La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 15

⇨ Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Montrer que $\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

Proposition 2.14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u).$$