Matrices

Table des matières

1 Matrice

1.1 Matrice

Définition 1.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $q, p \in \mathbb{N}$. On appelle *matrice* à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1, q]\!] \times [\![1, p]\!]$.

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a_{1,1} & \overset{\overset{j}{\downarrow}}{\cdots} & a_{1,p} \\ \vdots & a_{i,j} \longleftarrow & \vdots \\ a_{q,1} & \cdots & a_{q,p} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array}$$

On note $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarque

⇨ On appelle *matrice nulle* à q lignes et p colonnes et on note $0_{q,p}$ ou plus simplement 0 la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 1.2

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, on définit
- — la famille $(l_1, \ldots, l_q)$ des *vecteurs ligne* de A, où pour tout $i \in [\![1, q]\!]$, $l_i \coloneqq (a_{i,1}, \ldots, a_{i,p}) \in \mathbb{K}^p$.
- — la famille $(c_1, \ldots, c_p)$ des *vecteurs colonne* de A, où pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $c_j \coloneqq (a_{1,j}, \ldots, a_{q,j}) \in \mathbb{K}^q$.

Définition 1.3

On dit qu'une matrice A est
- — une *matrice colonne* lorsqu'elle ne possède qu'une seule colonne.
- — une *matrice ligne* lorsqu'elle ne possède qu'une seule ligne.

Remarque

- ⇨ Si $n \in \mathbb{N}$, l'application φ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  est une bijection. Elle permet d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, identification que nous ferons parfois dans ce cours. Cependant, on ne se permettra pas d'identifier $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.
- ⇨ Si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, cette identification permet de considérer que les vecteurs colonne de A sont des éléments de $\mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et donc des matrices colonne.

Définition 1.4

On appelle *transposée* de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et on note $A^\top$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs lignes de A. Autrement dit

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad \forall j \in [\![1, q]\!], \quad \left[A^\top\right]_{i,j} := a_{j,i}.$$

Exemple

- ⇨ Si on pose

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}), \quad \text{alors} \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K}).$$

Proposition 1.5

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$\left(A^\top\right)^\top = A.$$

1.2 Matrice carrée

Définition 1.6

On dit qu'une matrice est *carrée* lorsqu'elle possède autant de lignes que de colonnes. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 1.7

On appelle *matrice identité* et on note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad [I_n]_{i,j} := \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 1.8

— On dit que $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *diagonale* lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i \neq j \Longrightarrow d_{i,j} = 0.$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales à n lignes et n colonnes.

- Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on note $\mathrm{Diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right)$ la matrice

$$\mathrm{Diag}\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Les matrices $\mathrm{Diag}\left(\lambda, \dots, \lambda\right)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelées *matrices scalaires.*

Définition 1.9

On dit que $T \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ est *triangulaire supérieure* lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

On note $\mathcal{T}_n\left(\mathbb{K}\right)$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à n lignes et n colonnes. Graphiquement, une matrice triangulaire supérieure T s'écrit

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & \ddots & \star \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarque

⇨ On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$ est triangulaire inférieure lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad j > i \Longrightarrow t_{i,j} = 0.$$

Autrement dit T est triangulaire inférieure si et seulement si $T^\top$ est triangulaire supérieure.

Définition 1.10

Soit $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{K}\right)$.

- On dit que A est *symétrique* lorsque $A^\top = A$ c'est-à-dire lorsque

  $$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{j,i} = a_{i,j}.$$

  On note $\mathcal{S}_n\left(\mathbb{K}\right)$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes.
- On dit que A est *antisymétrique* lorsque $A^\top = -A$ c'est-à-dire lorsque

  $$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{j,i} = -a_{i,j}.$$

  On note $\mathcal{A}_n\left(\mathbb{K}\right)$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.

Remarque

⇨ Les formes générales d'une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n\left(\mathbb{K}\right)$ et d'une matrice antisymétrique $B \in \mathcal{A}_n\left(\mathbb{K}\right)$ sont

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *trace* de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme de ses coefficients diagonaux.

$$\mathrm{tr}(A) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Combinaison linéaire

Définition 2.1

- Soit $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit $A+B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par
$$\forall i \in [\![1,q]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad [A+B]_{i,j} \coloneqq a_{i,j} + b_{i,j}.$$
- Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $\lambda \cdot A$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par
$$\forall i \in [\![1,q]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad [\lambda \cdot A]_{i,j} \coloneqq \lambda a_{i,j}.$$

Remarque

⇨ Les matrices scalaires sont les λI_n où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 2.2

$(\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est la matrice nulle.

Définition 2.3

Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ on définit $E_{i,j}$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par
$$\forall k \in [\![1,q]\!], \quad \forall l \in [\![1,p]\!], \quad [E_{i,j}]_{k,l} \coloneqq \delta_{i,k}\delta_{j,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les matrices $E_{i,j}$ sont appelées *matrices élémentaires*.

Remarque

⇨ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, on a
$$A = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}.$$

En particulier, $\operatorname{Vect}(E_{1,1}, \dots, E_{1,p}, \dots, E_{q,1}, \dots, E_{q,p}) = \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 2.4

La transposition est linéaire
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top.$$

De plus cette application est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Proposition 2.5

- $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)$$
est la décomposition de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 2.6

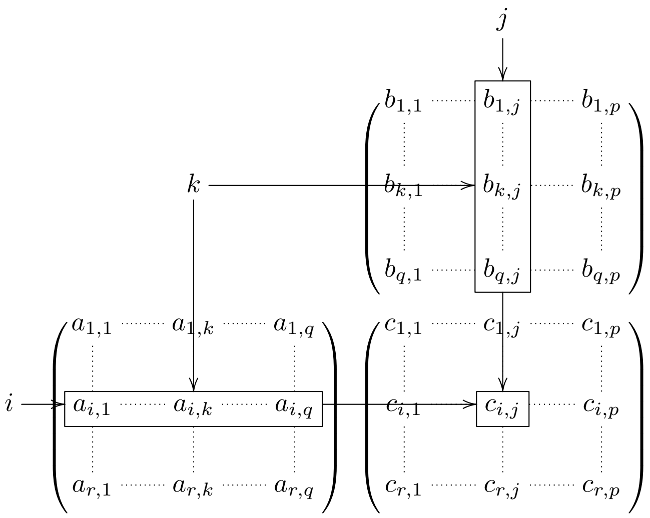
La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.2 Produit

Définition 2.7

Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit AB comme la matrice de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \quad \forall j \in [\![1, p]\!], \quad [AB]_{i,j} \coloneqq \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}.$$



Remarques

- Il est possible que le produit AB ait un sens sans que le produit BA en ait un. Mais si ces deux produits en ont un, en général, $AB \neq BA$. Enfin, il est possible que $AB = 0$ sans que $A = 0$ ou $B = 0$.
- Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que A et B *commutent* lorsque $AB = BA$.
- Si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ alors

$$AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \hfill \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q. \end{cases}$$

- Si on note $C_1, \ldots, C_p \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ les vecteurs colonne de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et si $X \coloneqq (x_1 \ \cdots \ x_p)^\top \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors

$$AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p.$$

Exercice 1

- Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec $B \coloneqq \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ si et seulement si elle est diagonale.

Proposition 2.8

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors $A = 0$ si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), \quad AX = 0.$$

Proposition 2.9

$$\begin{aligned}
&\forall A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), \quad \forall B, C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC \\
&\forall A, B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), \quad \forall C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda A + \mu B) C = \lambda AC + \mu BC
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\forall A \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K}), \quad \forall B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}), \quad \forall C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), &\quad (AB)C = A(BC) \\
\forall A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), &\quad AI_p = A \quad \text{et} \quad I_q A = A
\end{aligned}$$

Proposition 2.10

Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Proposition 2.11

Soit $r, q, p \in \mathbb{N}$, $i_2 \in [\![1, r]\!]$, $i_1, j_2 \in [\![1, q]\!]$ et $j_1 \in [\![1, p]\!]$. Alors

$$E_{i_2,j_2} E_{i_1,j_1} = \delta_{j_2,i_1} E_{i_2,j_1} = \begin{cases} 0 & \text{si } j_2 \neq i_1 \\ E_{i_2,j_1} & \text{si } j_2 = i_1. \end{cases}$$

Exercice 2

⇨ Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si c'est une matrice scalaire.

Proposition 2.12

- Si D et D' sont deux matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$, DD' est diagonale et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n$.
- Si T et T' sont deux matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$, TT' est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n$.

2.3 Calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 2.13

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$ par récurrence.

- $A^0 := I_n$
- $\forall p \in \mathbb{N}, \quad A^{p+1} := A^p A$.

Proposition 2.14

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \qquad \begin{aligned} A^{p+q} &= A^p A^q \\ (A^p)^q &= A^{pq}. \end{aligned}$$

- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, A^p et B^q commutent. De plus

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad (AB)^p = A^p B^p.$$

Proposition 2.15

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k \qquad \text{et} \qquad A^p - B^p = (A - B)\left[\sum_{k=0}^{p-1} A^{(p-1)-k} B^k\right].$$

Définition 2.16

On dit qu'une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$.

Proposition 2.17

Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, alors $N^n = 0$. En particulier, N est nilpotente.

Exercice 3

⇨ On pose

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.

Proposition 2.18

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Remarque

⇨ Cependant, en général, $\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$.

Exercice 4

⇨ Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

2.4 Matrice inversible

Définition 2.19

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *inversible* lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

Si tel est le cas, B est unique ; on la note A^{-1}. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Remarque

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, A^{-1} l'est aussi et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Exercices 5

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

⇨ Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. Montrer que $I_n + N$ est inversible.

Proposition 2.20

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, il en est de même pour AB et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition 2.21

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ possède les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} & I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad & AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad & A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Nous dirons que $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe, que l'on appelle *groupe linéaire*.

Proposition 2.22

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A^\top$ est inversible si et seulement si A l'est. De plus, si tel est le cas

$$\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

Proposition 2.23

Une matrice diagonale $D \coloneqq \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_k \neq 0.$$

Si tel est le cas

$$D^{-1} = \operatorname{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

3 Matrice et Système linéaire

3.1 Interprétation matricielle

Définition 3.1

On considère le *système linéaire* à q équations et p inconnues

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q. \end{cases}$$

La matrice $A \coloneqq (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice du système. La matrice $Y \coloneqq (y_i) \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ est appelée second membre. Si $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors $(x_1, \dots, x_p)$ est solution du système si et seulement si $AX = Y$.

Remarque

⇨ Le système est homogène lorsque $Y = 0$. On rappelle que dans ce cas, $X = 0$ est une solution, appelée solution triviale du système.

Définition 3.2

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

— On appelle *noyau* de A et on note $\operatorname{Ker} A$ l'ensemble des solutions du système homogène $AX = 0$.

$$\operatorname{Ker} A \coloneqq \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}.$$

— On note $C_1, \dots, C_p \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ les vecteurs colonne de A. On appelle *image* de A et on note $\operatorname{Im} A$ l'ensemble

$$\operatorname{Im} A \coloneqq \{x_1C_1 + \cdots + x_pC_p : x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}\}.$$

Remarque

⇨ Ces définitions sont motivées par le fait que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}.$$

est une application linéaire dont le noyau et l'image sont respectivement $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$.

Proposition 3.3

On considère le système linéaire $AX = Y$ où $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$.

— Ce système admet au moins une solution si et seulement si $Y \in \operatorname{Im} A$.

— Si c'est le cas, soit $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ une solution particulière. Alors l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = X_0 + \operatorname{Ker} A \coloneqq \{X_0 + X : X \in \operatorname{Ker} A\}.$$

3.2 Calcul d'inverse, système de Cramer

Proposition 3.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \quad AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = BY.$$

De plus, si tel est le cas, B est l'inverse de A.

Remarque

⇨ Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cette proposition affirme que s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que quels que soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + b_{1,2}y_2 + \cdots + b_{1,n}y_n \\ \quad\vdots \\ x_n = b_{n,1}y_1 + b_{n,2}y_2 + \cdots + b_{n,n}y_n \end{cases}$$

alors A est inversible et $A^{-1} = B$. Inverser une matrice revient donc à résoudre un système linéaire.

Exercice 6

⇨ Montrer que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Définition 3.5

On dit qu'un système $AX = Y$ à n équations et n inconnues est de *Cramer* lorsque $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarque

⇨ Le fait d'être de Cramer est une propriété qui ne dépend pas du second membre.

Proposition 3.6

Un système de Cramer admet une unique solution.

3.3 Opérations élémentaires par produit matriciel

Définition 3.7: Matrice de dilatation

Soit $\mu \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, il existe une et une seule matrice $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice DA est obtenue en multipliant la $k^{\text{ième}}$ ligne de A par μ.
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice AD est obtenue en multipliant la $k^{\text{ième}}$ colonne de A par μ.

On la note $D_k(\mu)$ et on dit que c'est une *matrice de dilatation*. De plus

$$D_k(\mu) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & k & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Proposition 3.8

Soit $\mu \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Alors, la matrice de dilatation $D_k(\mu)$ est inversible et

$$[D_k(\mu)]^{-1} = D_k\left(\frac{1}{\mu}\right).$$

Définition 3.9: Matrice de transvection

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Alors, il existe une et une seule matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice TA est obtenue en ajoutant λ fois la $j^{\text{ième}}$ ligne de A à sa $i^{\text{ième}}$ ligne.
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice AT est obtenue en ajoutant λ fois la i-ième colonne de A à sa j-ième colonne.

On la note $T_{i,j}(\lambda)$ et on dit que c'est une *matrice de transvection*. De plus

$$T_{i,j}\left(\lambda\right)=\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} & j & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & \downarrow & (0) \\ & \ddots & \\ & \lambda \longleftarrow & \\ & & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Proposition 3.10

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j$. Alors, la matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible et

$$\left[T_{i,j}\left(\lambda\right)\right]^{-1} = T_{i,j}\left(-\lambda\right).$$

Définition 3.11: Matrice de transposition

Soit $k_1, k_2 \in [\![1, n]\!]$ tels que $k_1 \neq k_2$. Alors, il existe une et une seule matrice $\tau \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice τA est obtenue en échangeant les ${k_1}^{\text{ième}}$ et ${k_2}^{\text{ième}}$ lignes.
- Quel que soit $A \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$, la matrice $A\tau$ est obtenue en échangeant les ${k_1}^{\text{ième}}$ et ${k_2}^{\text{ième}}$ colonnes.

On la note τ_{k_1,k_2} et on dit que c'est une *matrice de transposition*. De plus

$$\tau_{k_1,k_2} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} & & k_1 & & k_2 & \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \ddots\, 1 & & & & \\ & & 0 & \longleftarrow & 1 & \longleftarrow \\ & & \downarrow & 1 \ddots 1 & \downarrow & \\ & & 1 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow \\ & & & & & 1 \ddots 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ k_1 \\ \\ k_2 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Proposition 3.12

Soit $k_1, k_2 \in [\![1, n]\!]$ tels que $k_1 \neq k_2$. Alors, la matrice de transposition τ_{k_1,k_2} est inversible et

$$\tau_{k_1,k_2}^{-1} = \tau_{k_1,k_2}$$

3.4 Matrice échelonnée

Définition 3.13

On dit qu'une matrice $E \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est *échelonnée à pivots diagonaux* lorsqu'il existe $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{K}^*$ tels que

$$E = \begin{pmatrix} p_1 & \star & \cdots & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & p_r & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Les coefficients $p_1, \dots, p_r$ sont appelés *pivots* de la matrice E.

Remarque

⇨ Dans le cas où la matrice échelonnée à pivots diagonaux $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est carrée, elle est inversible si et seulement si $r = n$, c'est-à-dire si et seulement si E ne possède aucune ligne de 0.

Proposition 3.14

Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

- Alors, il existe une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes transformant A en une matrice échelonnée à pivots diagonaux.
- Autrement dit, il existe des familles $Q_1, \dots, Q_l \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $P_1, \dots, P_m \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ de matrices d'opérations élémentaires telles que $Q_l \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_m$ est une matrice échelonnée à pivots diagonaux.