Logique, Ensembles

« Si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture ; le pain quotidien dont il vit, ce sont les grands problèmes. »

— André Weil (1906-1998)

« Sur l'enseigne du barbier du village, on peut lire : Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Savez-vous qui rase le barbier ? »

— Bertrand Russel (1872–1970)

« J'aimais et j'aime encore les mathématiques pour elles-mêmes comme n'admettant pas l'hypocrisie et le vague, mes deux bêtes d'aversion. »

— Stendhal (1783-1842)

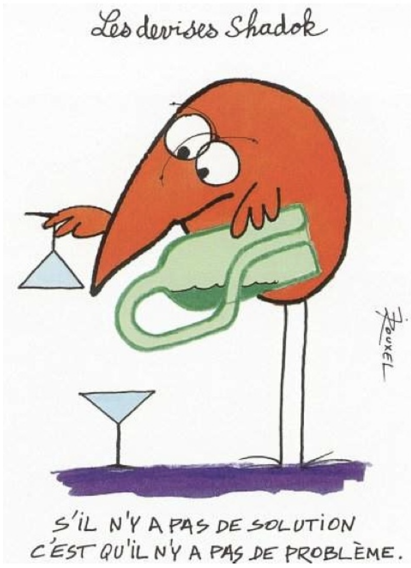

Table des matières

1 Éléments de logique

1.1 Assertion, prédicat

Définition 1.1

— On appelle *assertion* toute phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule valeur de vérité : vrai ou faux.
— Soit E un ensemble. On appelle *prédicat* sur E toute phrase mathématique dont la valeur de vérité dépend d'un élément $x \in E$.

Exemples

⇨ « 7 est un nombre premier » est une assertion vraie. L'assertion « 7 est divisible par 3 » est fausse.

⇨ $P(x) \coloneqq$ « x est rationnel » est un prédicat sur $\mathbb{R}$. $P(3/4)$ est vrai alors que $P(\sqrt{2})$ est faux.

⇨ $P(a, b, c) \coloneqq$ « $a^2 + b^2 = c^2$ » est un prédicat sur $\mathbb{N}^3$.

⇨ « L'ensemble des nombres premiers est infini » est une assertion vraie. L'assertion « Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ est premier » est une assertion dont on pense qu'elle est vraie. Mais aujourd'hui, personne n'en a fait la preuve.

Remarques

⇨ Deux principes fondamentaux gouvernent les valeurs de vérité des assertions.
— Le *principe de non-contradiction* : Une assertion ne peut être à la fois vraie et fausse.
— Le *principe du tiers exclu* : Une assertion qui n'est pas vraie est fausse.

⇨ Si P est un prédicat, on dit que P est vrai lorsque, quel que soit $x \in E$, $P(x)$ est vraie. Dire que P n'est pas vrai signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ est faux.

Définition 1.2

— Le *quantificateur universel* $\forall$ signifie « pour tout »
— Le *quantificateur existentiel* $\exists$ signifie « il existe (au moins) un »

Remarque

⇨ On trouve parfois le quantificateur $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ».

Exercices 1

⇨ Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

1. $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad x + y \geqslant 0.$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y \geqslant 0.$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 \geqslant x.$

⇨ Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n.$$

Définition 1.3

Soit P et Q deux assertions.
— On définit l'assertion (non P) comme étant vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.
— On définit l'assertion $[P \text{ et } Q]$ comme étant vraie lorsque P et Q sont vraies et fausse sinon.
— On définit l'assertion $[P \text{ ou } Q]$ comme étant vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.

Remarques

⇨ Les valeurs de vérité de ces assertions sont données par les tables suivantes.

P	V	F
non P	F	V

non P

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	F

P et Q

P \ Q	V	F
V	V	V
F	V	F

P ou Q

⇨ Lorsque le menu d'un restaurant vous propose « fromage ou dessert », le « ou » est employé au sens strict (on dit aussi exclusif) ; il n'est pas possible d'avoir les deux. En mathématiques, le « ou » est employé au sens large (on dit aussi inclusif). Lorsqu'on dit qu'un entier naturel n est divisible par 2 ou par 3, il peut très bien être divisible par 2 et par 3.

1.2 Implication, équivalence

Définition 1.4

Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Longrightarrow Q$ comme étant fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie sinon.

Remarques

⇨ Montrer $P \Longrightarrow Q$ revient à prouver que si P est vraie, alors Q est vraie.

⇨ Si P et Q sont deux prédicats sur E, $P \Longrightarrow Q$ signifie que $Q(x)$ est vraie dès que $P(x)$ est vraie. Si c'est le cas, on écrit

$$\forall x \in E, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$$

et on dit que P est une condition suffisante pour Q ou que Q est une condition nécessaire pour P.

Exercices 2

⇨ Dans les exemples suivants, dites si le prédicat P est une condition nécessaire ou une condition suffisante pour Q.

— $E = \mathbb{R}$, $P(x) :=$ « $x \in \mathbb{Q}$ » et $Q(x) :=$ « $x^2 \in \mathbb{Q}$ ».

— E est l'ensemble des triangles du plan, $P(T) :=$ « T est isocèle » et $Q(T) :=$ « T est équilatéral ».

— $E = \mathbb{R}^2$, $P(x, y) :=$ « $x \equiv y\ [2\pi]$ » et $Q(x, y) :=$ « $x \equiv y\ [\pi]$ ».

⇨ Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad [xy > 0 \quad \text{et} \quad x + y > 0] \quad \Longrightarrow \quad [x > 0 \quad \text{et} \quad y > 0].$$

⇨ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad |x| \leqslant \varepsilon\right] \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Proposition 1.5: Modus Ponens

Soit P et Q deux assertions. Si P et $P \Longrightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie.

Remarque

⇨ En pratique, on utilise cette proposition lorsque P et Q sont des prédicats. Si $P \Longrightarrow Q$ est vrai et x est un élément de E tel que $P(x)$ est vrai, alors $Q(x)$ est vrai. Dans ce cadre, on dit que $P \Longrightarrow Q$ est un théorème. Vérifier les hypothèses du théorème revient à vérifier que $P(x)$ est vrai et appliquer le théorème nous permet de conclure que $Q(x)$ est vrai. Traduisons mathématiquement le raisonnement suivant : « Socrate est un homme. Puisque tous les hommes sont mortels, alors Socrate est mortel ». Si $P(x) :=$ « x est un homme » et $Q(x) :=$ « x est mortel », alors l'énoncé « Tous les hommes sont mortels » s'écrit

$$\forall x \in U, \quad P(x) \Longrightarrow Q(x).$$

Puisque Socrate est un homme (P (Socrate) est vrai), on en déduit que Socrate est mortel (Q (Socrate) est vrai).

Exercice 3

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < a \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant b.$$

Montrer que $a \leqslant b$.

Définition 1.6

Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \iff Q$ comme étant vraie lorsque P et Q ont même valeur de vérité, et fausse sinon.

Remarques

⇨ Les valeurs de vérité des assertions $P \Longrightarrow Q$ et $P \iff Q$ sont regroupées dans les tableaux suivants.

P \ Q	V	F
V	V	F
F	V	V

$P \Longrightarrow Q$

P \ Q	V	F
V	V	F
F	F	V

$P \iff Q$

⇨ Les assertions $P \iff Q$ et $Q \iff P$ ont même valeur de vérité ; on dit que la relation d'équivalence est symétrique.

⇨ Si P et Q sont deux prédicats sur E, dire que $P \iff Q$ est vrai signifie que $Q(x)$ et $P(x)$ ont même valeur de vérité quel que soit $x \in E$. Si c'est le cas, on écrit

$$\forall x \in E, \quad P(x) \iff Q(x)$$

et on dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q.

Proposition 1.7

Soit P et Q deux assertions. Alors $P \iff Q$ et $[(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)]$ ont même valeur de vérité.

Remarque

⇨ Pour démontrer que $P \iff Q$, on pourra démontrer que $P \Longrightarrow Q$, puis que $Q \Longrightarrow P$; on dit qu'on raisonne par double implication.

Exercice 4

⇨ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \sin(\lambda x).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit 2π-périodique.

Proposition 1.8

Soit P, Q, R trois assertions. Alors

$$\begin{aligned} [P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] &\iff [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)], \\ [P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] &\iff [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]. \end{aligned}$$

Proposition 1.9: Lois de Morgan

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$\begin{aligned} \text{non } (P \text{ et } Q) &\iff [(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)], \\ \text{non } (P \text{ ou } Q) &\iff [(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)], \\ \text{non } (\text{non } P) &\iff P. \end{aligned}$$

Proposition 1.10: Raisonnement par contraposée

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$[P \Longrightarrow Q] \quad \iff \quad [\text{non } Q \Longrightarrow \text{non } P].$$

Remarque

⇨ Lorsque l'on démontre $[(\text{non } Q) \Longrightarrow (\text{non } P)]$ pour montrer que $[P \Longrightarrow Q]$, on dit que l'on raisonne par contraposée.

Exercice 5

⇨ Supposons que l'on ait montré que π^2 est irrationnel. Peut-on en déduire que π est irrationnel ?

Proposition 1.11

Soit P et Q deux assertions. Alors

$$[\text{non}\ \ (P \Longrightarrow Q)] \quad \Longleftrightarrow \quad [P \quad \text{et} \quad (\text{non}\ \ Q)]\,.$$

Proposition 1.12

Soit P un prédicat sur l'ensemble E. Alors

$$\begin{aligned} \text{non}\ \ [\forall x \in E, \quad P(x)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [\exists x \in E, \quad \text{non}\ \ (P(x))]\,, \\ \text{non}\ \ [\exists x \in E, \quad P(x)] \quad &\Longleftrightarrow \quad [\forall x \in E, \quad \text{non}\ \ (P(x))]\,. \end{aligned}$$

Exercice 6

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire les phrases suivantes avec des quantificateurs. En déduire leur négation.

« f est majorée », « f est croissante », « f est décroissante ».

2 Ensemble

2.1 Ensemble, élément

Définition 2.1

Les notions d'*ensemble*, d'*élément* et d'*appartenance* sont des notions premières en mathématiques que l'on ne définit pas. Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets mathématiques appelés éléments. La notation $x \in E$ signifie que l'élément x appartient à l'ensemble E.

Remarque

⇨ Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des objets mathématiques, l'ensemble constitué de ces éléments est noté $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Définition 2.2

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est *inclus* dans B et on note $A \subset B$ lorsque

$$\forall x \in A, \quad x \in B.$$

Proposition 2.3

Deux ensembles A et B sont égaux lorsqu'ils possèdent les mêmes éléments, c'est-à-dire lorsque

$$A \subset B \quad \text{et} \quad B \subset A.$$

Remarque

⇨ En particulier $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ et $\{0, 0, 1\} = \{0, 1\}$.

Définition 2.4

Soit E un ensemble. On appelle partie de E tout ensemble A inclus dans E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque

⇨ Un même objet mathématique peut très bien, selon le contexte, être un élément ou un ensemble. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 7

⇨ Déterminer $\mathcal{P}(\{1, 2\})$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

2.2 Opérations élémentaires

Définition 2.5

Soit E un ensemble et P un prédicat sur E. On définit

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

comme l'ensemble des éléments x de E tels que $P(x)$ est vrai. C'est une partie de E.

Définition 2.6

Soit A et B deux parties de E. On définit

$$A \cap B \coloneqq \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \in B\}, \qquad A \cup B \coloneqq \{x \in E \mid x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\},$$

$$\overline{A} \coloneqq \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Remarques

- Le complémentaire de A dans E est aussi noté A^c.
- On dit que deux ensembles A et B sont *disjoints* lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Proposition 2.7

Soit A, B, C trois parties de E. Alors

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\,, \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\,. \end{aligned}$$

Proposition 2.8: Lois de Morgan

Soit A et B deux parties de E. Alors

$$\begin{aligned} \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B}, \\ \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B}, \\ \overline{\overline{A}} &= A. \end{aligned}$$

Exercices 8

- Soit A et B deux parties d'un même ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
- Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E non vide.
  1. Si $A \cup B = A \cup C$, a-t-on $B = C$?
  2. Si $A \cup B = A \cap B$, a-t-on $A = B$?
  3. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
  4. Montrer que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$, alors $A = \overline{B}$ et $B = \overline{A}$.

Définition 2.9

Soit A et B deux parties de E. On définit

$$A \setminus B \coloneqq \{x \in E \mid x \in A \quad \text{et} \quad x \notin B\}.$$

Remarques

- L'ensemble $A \setminus B$ se lit « A privé de B ».
- Si A est une partie de E, $\bar{A} = E \setminus A$.

Définition 2.10

Soit A et B deux ensembles. On définit $A \times B$ comme l'ensemble des *couples* (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. Par définition, deux couples $(a_1, b_1)\,, (a_2, b_2) \in A \times B$ sont égaux lorsque $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Définition 2.11

— Si $A_1, \dots, A_n$ sont n ensembles, on définit $A_1 \times \cdots \times A_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(a_1, \dots, a_n)$ avec $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$. Par définition, deux n-uplets $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n$ sont égaux lorsque

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad a_k = b_k.$$

— Si A est un ensemble et $n \in \mathbb{N}$, on définit A^n comme

$$A^n := \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois } A}.$$

Remarques

⇨ A^1 est l'ensemble des 1-uplets (a), pour $a \in A$; on confondra cet ensemble avec A. Quant à A^0, c'est l'ensemble qui contient un unique élément, le 0-uplet $()$.

⇨ Pour énoncer qu'un prédicat portant sur deux variables est vrai, on peut écrire « $\forall x \in A, \quad \forall y \in A, \quad P(x, y)$ ». On condense cependant souvent cette phrase en « $\forall (x, y) \in A^2, \quad P(x, y)$ » ou en « $\forall x, y \in A, \quad P(x, y)$ ».

3 Application

3.1 Définition, exemples

Définition 3.1

Soit E et F deux ensembles. Une *application* f de E dans F associe à tout élément $x \in E$ un unique élément $f(x) \in F$, appelé image de x par f. On note

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

On dit que E est le *domaine* de f et que F est son *codomaine*. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarques

⇨ Deux applications sont égales lorsqu'elles ont même domaine et codomaine et qu'elles prennent la même valeur en chaque point de ce domaine.

⇨ On utilise aussi les expressions « ensemble de départ » et « ensemble d'arrivée » d'une application pour désigner respectivement son domaine et son codomaine.

⇨ « application » et « fonction » sont synonymes. L'usage veut cependant que l'on réserve le mot « fonction » aux applications dont le domaine et le codomaine sont des parties de $\mathbb{C}$.

⇨ L'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ est aussi noté F^E.

⇨ Pour les fonctions usuelles, il arrive qu'on omette les parenthèses et qu'on écrive $\sin x$ au lieu de $\sin(x)$. Cependant, on ne se permettra pas de faire cela avec les autres fonctions.

Définition 3.2

Si f est une application de E dans F, on appelle *graphe* de f l'ensemble

$$\{(x, y) \in E \times F \mid f(x) = y\}.$$

Définition 3.3

Soit A une partie de E. On appelle *fonction caractéristique* de A et on note $\mathbb{1}_A$ l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques

⇨ Deux parties A et B de E sont égales si et seulement si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

⇨ Si A et B sont deux parties de E, alors

$$\forall x \in E, \quad \mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \max\left(\mathbb{1}_A(x), \mathbb{1}_B(x)\right).$$

Définition 3.4

Soit $f : E \to F$ et $y \in F$. On appelle *antécédent* de y tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 9

⇨ Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au couple (x, y) associe le couple $(x+2y, xy)$. Déterminer les antécédents de $(3, 1)$.

Définition 3.5

Soit $f : E \to F$.

— Soit B une partie de F. On appelle image réciproque de B et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B.

$$f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

— Soit A une partie de E. On appelle image directe de A et on note $f(A)$ l'ensemble des éléments de F qui sont image d'un élément de A par f.

$$f(A) \coloneqq \{y \in F \mid \exists x \in A, \quad f(x) = y\}$$

L'ensemble $f(E)$ est appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

Remarque

⇨ L'ensemble image $f(A)$ est aussi noté

$$\{f(x) : x \in A\}.$$

Exercices 10

⇨ Soit f la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Calculer $f^{-1}(f(\{\pi/2\}))$ et $f(f^{-1}(\{0, 2\}))$.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$. Calculer $f^{-1}(\mathbb{U})$.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \coloneqq \frac{x}{1+x^2}.$$

En lisant le tableau de variations de f, intuiter $f(\mathbb{R})$, puis prouver rigoureusement ce résultat.

⇨ Soit f une application de E dans F. Si A est une partie de E, comparer $f^{-1}(f(A))$ et A. De même, si B est une partie de F, comparer $f(f^{-1}(B))$ et B.

Définition 3.6

Soit f une application de E dans F.

— Si A est une partie de E, l'application

$$f\big|_A : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est appelée *restriction* de f à A.

— On dit qu'une application g est un *prolongement* de f lorsque f est une restriction de g.

— Si B est une partie de F telle que

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in B$$

l'application

$$f\big|^B : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est appelée *corestriction* de f à B.

Remarque

⇨ Soit $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F telles que

$$\forall x \in A, \quad f(x) \in B.$$

Alors, on peut définir l'application

$$f\Big|_A^B : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

appelée restriction de f à A, corestreinte à B.

Définition 3.7

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit l'application $g \circ f$ de E dans G par

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right).$$

Remarque

⇨ Si A est une partie de E, alors $(g \circ f)(A) = g(f(A))$. De même, si B est une partie de G, alors

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)).$$

Proposition 3.8

Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

On note cette application $h \circ g \circ f$.

3.2 Application injective, surjective, bijective

Définition 3.9

Soit $f : E \to F$. On dit que f est *injective* lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

c'est-à-dire lorsque tout élément de F a au plus un antécédent.

Exercices 11

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone alors elle est injective. La réciproque est-elle vraie ?

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$. Montrer qu'elle est injective.

⇨ Soit φ l'application qui à la fonction f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ associe la fonction $\varphi(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)](x) := f(\sin x)$$

Montrer que φ est injective.

⇨ Soit E un ensemble et A une partie de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$$

soit injective.

Définition 3.10

Soit $f : E \to F$. On dit que f est *surjective* lorsque

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad f(x) = y$$

c'est-à-dire lorsque tout élément de F a au moins un antécédent.

Proposition 3.11

Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Exercices 12

⇨ L'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ?

Définition 3.12

On dit qu'une application $f : E \to F$ est *bijective* lorsqu'elle est injective et surjective, c'est-à-dire lorsque tout élément de F possède un unique antécédent.

Exercices 13

⇨ Montrer que la fonction f qui à x associe $\frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

⇨ Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b) & \longmapsto & 2^a(2b+1)-1 \end{array}$$

est bijective.

⇨ Soit X un ensemble et $f : X^2 \to X$ une bijection. Montrer que

$$g : \begin{array}{ccc} X^3 & \longrightarrow & X \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x, f(y,z)) \end{array}$$

est bijective.

Proposition 3.13

- La composée de deux applications injectives est injective.
- La composée de deux applications surjectives est surjective.
- La composée de deux applications bijectives est bijective.

Exercices 14

⇨ Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. De même, montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

⇨ Est-il vrai que si $g \circ f$ est bijective, f et g le sont ?

Définition 3.14

Soit E un ensemble. On appelle *identité* et on note Id_E l'application de E dans E définie par

$$\forall x \in E, \quad \mathrm{Id}_E(x) := x.$$

Si f est une application de E dans F

$$f \circ \mathrm{Id}_E = f \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_F \circ f = f.$$

Proposition 3.15

Soit f une application de E dans F.

- L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F\,.$$

  Si tel est le cas, g est unique ; on l'appelle *bijection réciproque* de f et on la note f^{-1}.
- Si $f : E \to F$ est bijective, f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Remarques

⇨ Soit f une bijection de E dans F. Quel que soit $y \in F$, si $x \in E$ est tel que $f(x) = y$, alors $f^{-1}(y) = x$.

⇨ La fonction ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est une bijection et sa bijection réciproque est la fonction exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercices 15

⇨ Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, 5x+3y) \end{array}$$

est bijective et calculer f^{-1}.

⇨ Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement croissante, il en est de même pour f^{-1}. Que dire si f est impaire ?

Proposition 3.16

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

3.3 Famille

Si E est un ensemble, il est courant de se donner n éléments $f_1, \ldots, f_n$ de E. Cela revient à définir une application

$$f : \begin{array}{ccc} [\![1, n]\!] & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & f(i) \end{array}$$

où l'on pose $f(i) := f_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Nous dirons que f est une famille d'éléments de E indexée par $[\![1, n]\!]$. On peut généraliser ce principe et construire des familles indexées par un ensemble quelconque. Par exemple, on peut considérer l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui à $\lambda \in \mathbb{R}$ associe la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) := \mathrm{e}^{\lambda x}.$$

On a ainsi défini une famille d'éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ indexée par $\mathbb{R}$.

Définition 3.17

Soit E un ensemble et I un ensemble, appelé ensemble d'indices. On appelle *famille d'éléments de E indexée par I* toute application

$$f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & f_i. \end{array}$$

Cette application est notée $(f_i)_{i \in I}$. L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I est noté E^I.

Remarques

⇨ Une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$ est une suite d'éléments de E.

⇨ On appelle sous-famille d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ toute famille de la forme $(f_i)_{i \in J}$ où J est une partie de I.

⇨ Si A est un ensemble, on dit qu'une famille $(f_i)_{i \in I}$ est la famille des éléments de A lorsque f est une bijection de I dans A. Le fait de parler de « la » famille des éléments de A est un abus de langage, car cette famille n'est pas unique.

Définition 3.18

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On définit alors

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x \in E \mid \forall i \in I, \quad x \in A_i\},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x \in E \mid \exists i \in I, \quad x \in A_i\}.$$

Exercice 16

⇨ Soit $f : E \to E$. On définit f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f^0 := \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \left[\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} := f \circ f^n\right]$$

Soit A une partie de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n := f^n(A)$. Enfin, on pose $B := \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrer que $A \subset B$ et que $f(B) \subset B$.

Proposition 3.19

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Alors

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$$

Définition 3.20: Partition

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une *partition* de E lorsque

$$E = \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \text{et} \qquad [\forall i,j \in I, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing].$$

Remarques

⇨ La définition de partition peut varier d'un cours à l'autre. Dans certains cours, on demande en plus que les A_i soient non vides ; on appelle alors *recouvrement disjoint* ce que nous appelons ici partition.

⇨ La notion de partition a été définie à l'aide de familles. Mais on peut aussi la définir de manière ensembliste ; on dit qu'une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}(E)$ est une *partition (au sens ensembliste)* de E lorsque
— $\forall x \in E, \quad \exists A \in \mathcal{P}, \quad x \in A.$
— $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{P}, \quad A_1 \neq A_2 \Longrightarrow A_1 \cap A_2 = \varnothing.$
— $\forall A \in \mathcal{P}, \quad A \neq \varnothing.$
Remarquons que dans la définition ensembliste, on demande à ce que les ensembles appartenant à $\mathcal{P}$ soient non vides.

Exercice 17

⇨ Déterminer les partitions au sens ensembliste de $E \coloneqq \{1,2,3\}$.

4 Relation binaire

Définition 4.1

Soit E un ensemble. On appelle *relation binaire* sur E tout prédicat $\mathcal{R}$ défini sur $E \times E$. Si x et y sont deux éléments de E et $\mathcal{R}(x,y)$ est vrai, on écrit $x\mathcal{R}y$.

Définition 4.2

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est
— *réflexive* lorsque
$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x.$$
— *transitive* lorsque
$$\forall x,y,z \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$
— *symétrique* lorsque
$$\forall x,y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x.$$
— *antisymétrique* lorsque
$$\forall x,y \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x] \Longrightarrow x = y.$$

4.1 Relation d'ordre

Définition 4.3

On dit qu'une relation binaire $\preceq$ est une *relation d'ordre* lorsqu'elle est
— réflexive : $\forall x \in E, \quad x \preceq x$.
— transitive : $\forall x,y,z \in E, \quad [x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq z] \Longrightarrow x \preceq z$.
— antisymétrique : $\forall x,y \in E, \quad [x \preceq y \quad \text{et} \quad y \preceq x] \Longrightarrow x = y$.
On appelle *ensemble ordonné* tout ensemble muni d'une relation d'ordre.

Remarques

⇨ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. La relation $\leqslant$ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\forall f,g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant g(x)]$$

est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

⇨ Si E est un ensemble, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

⇨ Si $\preceq$ est une relation d'ordre sur E, la relation $\succeq$ définie par

$$\forall x,y \in E, \quad x \succeq y \quad \Longleftrightarrow \quad y \preceq x$$

est une relation d'ordre appelée relation d'ordre opposée à la première.

⇨ La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas réflexive.

Exercice 18

⇨ Montrer que la relation $|$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a|b \quad \Longleftrightarrow \quad [\exists k \in \mathbb{N}, \quad b = ka]$$

est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Définition 4.4

On dit qu'une relation d'ordre $\preceq$ est totale lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad x \preceq y \quad \text{ou} \quad y \preceq x.$$

Remarque

⇨ La relation d'ordre $\leqslant$ est totale sur $\mathbb{R}$. Par contre, les relations $\leqslant$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ et $|$ sur $\mathbb{N}$ ne sont pas totales.

Définition 4.5

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

— On dit que $M \in E$ est un *majorant* de A lorsque

$$\forall a \in A, \quad a \preceq M.$$

— On dit que $m \in E$ est un *minorant* de A lorsque

$$\forall a \in A, \quad m \preceq a.$$

Exercice 19

⇨ Soit $c > 0$. On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, t), (x', t') \in \mathbb{R}^2, \quad (x, t) \preceq (x', t') \quad \Longleftrightarrow \quad |x' - x| \leqslant c \cdot (t' - t).$$

Vérifier que c'est une relation d'ordre. Dessiner l'ensemble des majorants et des minorants d'un couple (x_0, t_0). L'ordre est-il total ?

Définition 4.6

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

— On dit que A admet un *plus grand élément* lorsqu'il existe un majorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle plus grand élément de A.

— On dit que A admet un *plus petit élément* lorsqu'il existe un minorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle plus petit élément de A.

Remarques

⇨ Muni de l'ordre usuel, $[0, 1[$ admet un plus petit élément 0 mais n'admet pas de plus grand élément. Muni de la relation de divisibilité, $\{2, 3\}$ n'admet ni de plus grand ni de plus petit élément.

⇨ Un ensemble admettant un plus petit ou un plus grand élément est non vide.

⇨ Si E est totalement ordonné et A est une partie finie non vide de E, alors il admet un plus petit et un plus grand élément.

4.2 Relation d'équivalence

Définition 4.7

On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une *relation d'équivalence* lorsqu'elle est

— réflexive : $\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$.

— transitive : $\forall x, y, z \in E, \quad [x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z$.

— symétrique : $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$.

Remarque

⇨ Si E est un ensemble quelconque, la relation d'égalité est une relation d'équivalence. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}$ par « $\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a\mathcal{R}b \quad \Longleftrightarrow \quad a \equiv b\ [n]$ » est une relation d'équivalence. De même, si f est une application de E dans F, la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par « $\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = f(y)$ » est une relation d'équivalence.

Exercice 20

⇨ Soit E un ensemble. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\mathcal{R}B \quad \iff \quad \text{« Il existe une bijection de } A \text{ dans } B. \text{ »}$$

est une relation d'équivalence.

Définition 4.8

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x \in E$. On appelle *classe d'équivalence de x* et on note $\mathrm{Cl}(x)$ l'ensemble des éléments de E en relation avec x

$$\mathrm{Cl}(x) := \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

On dit qu'une partie A de E est *une classe d'équivalence* lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $A = \mathrm{Cl}(x)$.

Remarque

⇨ Si $x, y \in E$, alors

$$\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y) \quad \iff \quad x\mathcal{R}y.$$

Proposition 4.9

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors, l'ensemble des classes d'équivalence réalise une partition de E.

Exercice 21

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de classes d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ pour la relation de congruence modulo n.

5 L'ensemble des entiers naturels

Dans ce cours, nous ne chercherons pas à construire l'ensemble des entiers naturels. Nous nous limiterons à la définition intuitive suivante.

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Nous supposerons aussi définies les opérations usuelles $+$ et $\times$ ainsi que la relation d'ordre totale $\leqslant$. Nous admettrons enfin la proposition suivante.

Proposition 5.1

Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Proposition 5.2

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

5.1 Récurrence

Proposition 5.3: Principe de récurrence

Soit A une partie de $\mathbb{N}$ telle que
- $0 \in A$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \Longrightarrow n + 1 \in A$.

Alors $A = \mathbb{N}$.

Remarques

⇨ Cette proposition est au cœur du principe de récurrence. Si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ est vraie,
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour démontrer cela d'appliquer la proposition précédente à

$$A := \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{H}_n \text{ est vraie}\}.$$

⇨ Le principe de récurrence double est une conséquence du principe de récurrence. En effet, si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que
- $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sont vraies,

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [\mathcal{H}_n \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{n+1}] \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+2}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour cela de remarquer que le prédicat $\mathcal{P}$ défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n := \text{« } \mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n+1} \text{ sont vraies »}$$

vérifie le principe de récurrence.

⇨ De même, le principe de récurrence forte est une conséquence du principe de récurrence. En effet, si $\mathcal{H}$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$ tel que

— $\mathcal{H}_0$ est vraie,

— $\forall n \in \mathbb{N}, \quad [\mathcal{H}_0 \quad \text{et} \quad \ldots \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_n] \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$,

alors $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit pour cela de remarquer que le prédicat $\mathcal{P}$ défini sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}_n := \text{« } \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n \text{ sont vraies »}.$$

vérifie le principe de récurrence.

Exercices 22

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 2$ est un multiple de 3.

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 := 1, \quad u_1 := 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} := u_{n+1} + \frac{2}{n+2} u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n^2$.

⇨ Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit comme produit de nombres premiers.

5.2 Définition par récurrence

Proposition 5.4

Soit E un ensemble, $f \in \mathcal{F}(E, E)$ et $x \in E$. Alors, il existe une unique suite (u_n) d'éléments de E telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Remarque

⇨ Il arrive qu'au lieu d'avoir une fonction $f \in \mathcal{F}(E, E)$, on ait une fonction $f \in \mathcal{F}(A, E)$ où A est une partie de E. Si $x \in A$, et que l'on souhaite prouver l'existence d'une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

nous sommes face à un problème bien plus délicat. En effet, l'existence d'une telle suite n'est pas garantie. Par exemple, il n'existe pas de suite (u_n) telle que

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n - 1}.$$

En effet, si tel était le cas, on aurait $u_1 = 1$ donc $u_2 = (3u_1 - 2)/(u_1 - 1)$ ne serait pas défini. On ne peut tout simplement pas appliquer la proposition précédente, car la fonction

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{3x - 2}{x - 1} \end{array}$$

n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Définition 5.5

Soit E un ensemble, A une partie de E et $f \in \mathcal{F}(A, E)$. On dit qu'une partie B de A est *stable* par f lorsque

$$\forall x \in B, \quad f(x) \in B.$$

Remarques

⇨ Si B est stable par f, il est possible de considérer la restriction de f à B, corestreinte à B. On parle alors d'application *induite* à B.

⇨ Si A est une partie de E, $f \in \mathcal{F}(A, E)$ et $x \in A$, pour prouver l'existence d'une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

il suffit de trouver une partie B de A, stable par f et telle que $x \in B$.

Exercice 23

⇨ Soit $x \in [2, +\infty[$. Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n - 1}.$$