Intégration

Table des matières

1 Intégration

1.1 Fonction en escalier

Définition 1.1

On appelle *subdivision* du segment $[a,b]$ toute famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels telle que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Remarques

- On dit qu'une subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est *régulière* lorsque $x_{k+1} - x_k$ est indépendant de k. La subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a,b]$ définie par
$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad x_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$
est dite régulière de *pas* $(b-a)/n$.
- Se donner une subdivision de $[a,b]$ revient à se donner une partie finie de $[a,b]$ contenant a et b.

Définition 1.2

Soit $\tau_1 = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $\tau_2 = (y_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ deux subdivisions d'un même segment $[a,b]$. On dit que τ_2 est *plus fine* que τ_1 lorsque tout élément de la famille τ_1 est un élément de la famille τ_2, c'est-à-dire lorsque

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \exists i \in [\![0,m]\!], \quad x_k = y_i.$$

Proposition 1.3

Soit τ_1 et τ_2 deux subdivisions d'un même segment $[a,b]$. Alors, il existe une subdivision plus fine que τ_1 et τ_2.

Définition 1.4

- Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{K}$ est une *fonction en escalier* sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a,b]$ telle que φ est constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$:
$$\forall k \in [\![0,n-1]\!], \quad \exists c_k \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in \left]x_k, x_{k+1}\right[, \quad \varphi(x) = c_k.$$
- Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ est en escalier sur I lorsque sa restriction à tout segment $[a,b]$ de I est en escalier sur $[a,b]$.

Remarque

⇨ Une fonction en escalier sur un segment prend un nombre fini de valeurs. Une telle fonction est donc bornée.

⇨ Si on change la valeur d'une fonction en escalier en un nombre fini de points, elle reste en escalier.

Exercice 1

⇨ Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x > 0, \quad \varphi(x) \coloneqq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$
φ est-elle en escalier sur $\mathbb{R}_+^*$? Si on prolonge φ en 0 en posant $\varphi(0) = 0$, la nouvelle fonction est-elle en escalier sur $\mathbb{R}_+$?

Proposition 1.5

Soit I un intervalle.
- L'ensemble des fonctions en escalier sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
- Si φ est une fonction en escalier sur I, il en est de même pour $|\varphi|$ et $\overline{\varphi}$.

1.2 Fonction continue par morceaux

Définition 1.6

- Soit $[a, b]$ un segment. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est une fonction *continue par morceaux* sur $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que :
  - Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$.
  - Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, f admet une limite finie à droite (au sens strict) en x_k et à gauche (au sens strict) en x_{k+1}. Autrement dit, la restriction de f à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.
- Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I lorsque sa restriction à tout segment $[a, b]$ de I est continue par morceaux sur $[a, b]$. On note $\mathcal{C}_{\mathrm{m}}^0(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Remarques

⇨ Les fonctions en escalier ainsi que les fonctions continues sont continues par morceaux.

⇨ Si on change la valeur d'une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, elle reste continue par morceaux.

⇨ On dit qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ définie sur une partie élémentaire $\mathcal{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ est continue par morceaux lorsque sa restriction à chaque I_k est continue par morceaux.

Proposition 1.7

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$. Alors f est bornée sur $[a, b]$.

Proposition 1.8

Soit I un intervalle.
- L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
- Si f est une fonction continue par morceaux sur I, il en est de même pour $|f|$ et $\overline{f}$.

Proposition 1.9

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une fonction en escalier φ définie sur $[a, b]$ telle que
$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

1.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Dans la suite de ce chapitre, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, on définit
$$\text{« } [a_1, \ldots, a_n] \text{ »} \coloneqq [\min(a_1, \ldots, a_n), \max(a_1, \ldots, a_n)].$$

Définition 1.10

Il existe une unique famille $(I_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}$ d'applications de $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(« [a,b] », \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, associant à $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(« [a,b] », \mathbb{K})$ le nombre $I_{a,b}(f) \in \mathbb{K}$ noté

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

et vérifiant les propriétés suivantes.

— Linéarité

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(« [a,b] », \mathbb{K}),$$
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Relation de Chasles

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(« [a,b,c] », \mathbb{K}),$$
$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

— Positivité

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(« [a,b] », \mathbb{R}),$$
$$[(a \leqslant b) \quad \text{et} \quad (\forall x \in [a,b], \quad f(x) \geqslant 0)] \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

— Uniformité

$$\forall z \in \mathbb{K}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b z\,\mathrm{d}x = z(b-a).$$

Proposition 1.11

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Alors, pour tout $a, b \in I$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 1.12

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors, pour tout $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\,(f(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\,(f(x))\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \int_a^b \overline{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Remarque

⇨ Soit $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\mathcal{D}, \mathbb{K})$ une fonction continue par morceaux définie sur une partie élémentaire. Soit $\mathcal{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ sa décomposition en composantes connexes. Alors, pour tout $a, b \in \mathcal{D}$, lorsqu'il existe un même $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $a, b \in I_k$, on peut définir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cependant, il n'est pas possible de définir une telle intégrale si a et b n'appartiennent pas au même I_k. Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) := \frac{1}{x},$$

alors f est continue sur $\mathbb{R}^*$, mais l'intégrale

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

n'a aucun sens.

1.4 Positivité de l'intégrale

Proposition 1.13: Croissance de l'intégrale

Soit f et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et $a, b \in I$. On suppose que

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad \forall x \in [a, b], \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques

⇨ Si f et $g : I \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues par morceaux et $a, b \in I$ sont tels que

$$a \geqslant b \quad \text{et} \quad \forall x \in \text{« } [a, b] \text{ »}, \quad f(x) \leqslant g(x),$$

alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Autrement dit, lorsque les bornes « ne sont pas dans le bon ordre », l'inégalité change de sens.

⇨ Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et $m, M \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [a, b], \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Alors

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M\,(b-a).$$

Exercices 2

⇨ Déterminer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 \operatorname{Arcsin}^n x\,\mathrm{d}x.$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

En déduire que

$$\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leqslant \frac{4}{2n+3}.$$

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Proposition 1.14

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

est invariant par tout changement de la valeur de f en un nombre fini de points.

Remarque

⇨ Soit φ une fonction en escalier sur le segment $[a, b]$. Il existe donc une subdivision $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ et $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \forall x \in \,]x_k, x_{k+1}[, \quad \varphi(x) = c_k.$$

Alors

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k).$$

Proposition 1.15

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si f est positive sur $[a, b]$ et s'il existe $x_0 \in [a, b]$ en lequel f est continue et $f(x_0) > 0$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

Proposition 1.16

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si f est de signe constant sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

alors

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = 0.$$

Exercices 3

⇨ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\int_0^1 P^2(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que $P = 0$.

⇨ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

1.5 Inégalité triangulaire

Proposition 1.17: Inégalité triangulaire

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $a, b \in I$. Si $a \leqslant b$, alors

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 4

⇨ Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \coloneqq \int_0^1 f(t) \sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que g est lipschitzienne.

1.6 Somme de Riemann

Proposition 1.18

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux. Alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarque

⇨ Si $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux, de même

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercices 5

⇨ Calculer la limite de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver un équivalent simple de

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha}.$$

2 Intégration et dérivation

2.1 Continuité et dérivabilité

Proposition 2.1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, $a \in I$ et F la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

On suppose qu'il existe un intervalle $J \subset I$ et un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tels que

$$\forall x \in J, \quad |f(x)| \leqslant M.$$

Alors F est M-lipschitzienne sur J.

Proposition 2.2

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, $a \in I$ et F la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Alors F est continue sur I.

Proposition 2.3

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, $a \in I$ et F la fonction définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0, alors F est dérivable en x_0 et

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Remarque

⇨ Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $a, b : J \to I$ deux fonctions dérivables. On définit la fonction g sur J par

$$\forall x \in J, \quad g(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Alors g est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, \quad g'(x) = b'(x) f(b(x)) - a'(x) f(a(x)).$$

2.2 Primitive

Définition 2.4

Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On appelle *primitive* de f toute fonction dérivable $F : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{D}, \qquad F'(x) = f(x).$$

Proposition 2.5

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors

— f admet une primitive.

— Si $F : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f, une fonction $G : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f si et seulement si il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que
$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + c.$$

Remarque

⇨ Si f est une fonction continue sur une partie élémentaire $\mathcal{D} = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ (où $I_1, \ldots, I_n$ sont les composantes connexes de $\mathcal{D}$), alors f admet une primitive. De plus, si $F : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est une primitive de f, une fonction $G : \mathcal{D} \to \mathbb{K}$ est une primitive de f si et seulement si il existe $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tels que
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \forall x \in I_k, \quad G(x) = F(x) + c_k.$$

2.3 Calcul d'intégrales

Théorème 2.6: Théorème fondamental de l'analyse

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, $a, b \in I$ et F est une primitive de f. Alors
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Remarques

⇨ Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in I$. Alors
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

⇨ Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| \leqslant M,$$
alors f est M-lipschitzienne. On retrouve donc l'inégalité des accroissements finis dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \geqslant a$. Montrer que
$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}\right| \leqslant \frac{1}{na^{\frac{n-1}{n}}}\,|x - y|\,.$$

Proposition 2.7: Intégration par parties

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, $g : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $a, b \in I$. Alors, si F est une primitive de f
$$\int_a^b \overbrace{f(x)}^{\text{intègre}}\ \underbrace{g(x)}_{\text{dérive}}\,\mathrm{d}x = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 7

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit
$$I_n \coloneqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x.$$
Calculer I_n.

Proposition 2.8: Changement de variable

Soit $\overline{x} : I \to J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $x_a, x_b \in J$ et $t_a, t_b \in I$ tels que $\overline{x}\left(t_a\right) = x_a$ et $\overline{x}\left(t_b\right) = x_b$ et $f : J \to \mathbb{K}$ une fonction continue. Alors
$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_a}^{t_b} f\left(\overline{x}(t)\right) \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque

⇨ Cette proposition reste vraie lorsque f est continue par morceaux et $\overline{x}(t) = \alpha t + \beta$.

Exercices 8

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Calculer

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x.$$

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Montrer que f est linéaire.

Proposition 2.9

- Soit $a \geqslant 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.
  - Si f est paire

    $$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

    En particulier

    $$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  - Si f est impaire

    $$\int_{-a}^0 f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

    En particulier

    $$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, T-périodique. Alors

  $$\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

  ne dépend pas du réel a.

2.4 Formules de Taylor

2.4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 2.10: Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Si $a, b \in I$, alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercices 9

⇨ Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

⇨ Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}.$$

Proposition 2.11: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M.$$

Si $a, b \in I$, alors
$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} |b-a|^{n+1}.$$

Exercice 10

⇨ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin x.$$

2.4.2 Intégration de développement limité

Proposition 2.12

Soit f et $g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle contenant 0. On suppose que g est de signe constant au voisinage à gauche de 0 et au voisinage à droite de 0. Si
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(g(x)\right),$$
alors
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Proposition 2.13

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle contenant 0. On suppose que f admet un développement limité en 0 à l'ordre n
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right).$$
Si F est une primitive de f, alors elle admet un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ donné par
$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{n+1}\right).$$

Proposition 2.14: Formule de Taylor-Young

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur un intervalle contenant $a \in \mathbb{R}$. On suppose de plus que f est dérivable n fois en a. Alors f admet un développement limité en a à l'ordre n et
$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^n\right).$$