Cours : Graphe, théorie

Une partie du graphe routier de Lyon.

Table des matières

1 Graphe non orienté

1.1 Définition

Définition 1.1: Graphe non orienté

On appelle *graphe non orienté*, ou simplement *graphe*, tout couple $G := (S, A)$ tel que :
— S est un ensemble fini non vide dont les éléments sont appelés *sommets* ou *noeuds*.
— A est un ensemble dont les éléments, appelés *arêtes*, sont des parties à 2 éléments de S.

Remarques

⇨ On appelle *ordre* du graphe $G := (S, A)$, le nombre de ses sommets, c'est-à-dire $|S|$.

- ⇨ L'arête $a := \{x, y\}$ est aussi notée xy ou yx ; le fait que $xy = yx$ justifie le nom de graphe non orienté. On dit que x et y sont les *extrémités* de a et que x et y sont *reliés* par l'arête a. On dit aussi que l'arête a est *incidente* aux sommets x et y. Puisqu'on impose qu'une arête possède 2 éléments, il n'existe pas d'arête reliant un sommet à lui-même.
- ⇨ Deux sommets reliés par une arête sont dits *adjacents*. On dit aussi qu'ils sont *voisins*.
- ⇨ Les graphes tirent leur nom du fait qu'il est aisé de les représenter graphiquement : à chaque sommet x, on associe un point du plan et on relie les sommets adjacents.
- ⇨ On peut rencontrer des graphes possédant des arêtes reliant un sommet à lui-même (on parle de *boucle*) ou des sommets reliés par plusieurs arêtes. De tels graphes sont appelés *multigraphes*, par opposition aux graphes définis dans ce cours qu'on appelle graphes *simples*.

Exemples

- ⇨ Voici quelques familles de graphes usuels.
  — Le *graphe entièrement déconnecté* possède n sommets et aucune arête.
  — Le *graphe complet* K_n possède n sommets et une arête entre chaque paire de sommets.

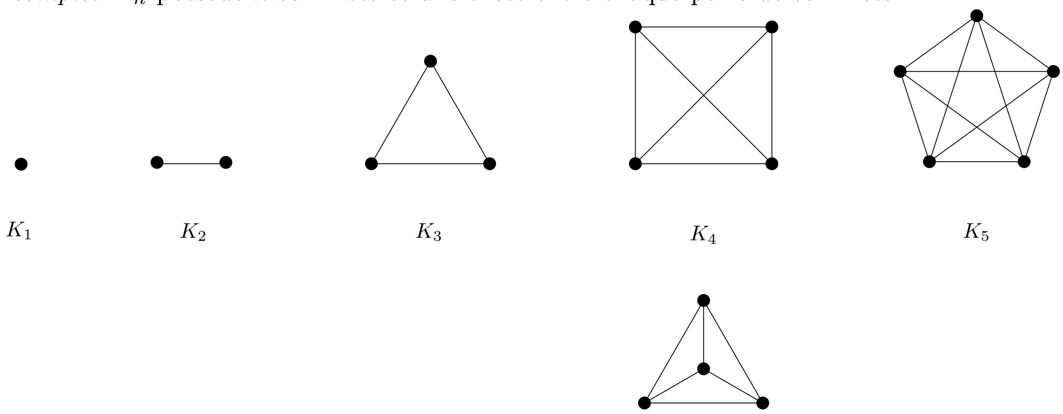


FIGURE 1 : Les cinq premiers graphes complets. Pour $n \geqslant 5$, ces graphes ne sont pas planaires.

—Le *graphe chemin* P_n possède n sommets numérotés $0, \dots, n-1$ et une arête entre i et j si et seulement si $i = j + 1$.

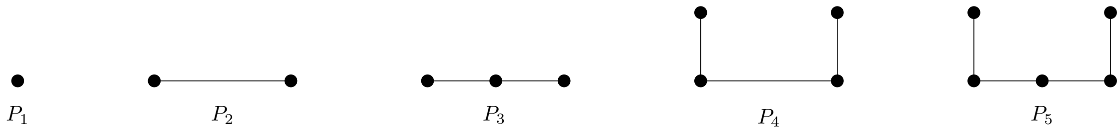


FIGURE 2 : Les premiers graphes chemins.

—Le *graphe cycle* C_n, défini pour $n \geqslant 3$, possède n sommets numérotés $0, \dots, n-1$ et une arête entre i et j si et seulement si $i \equiv j + 1 \ [n]$.

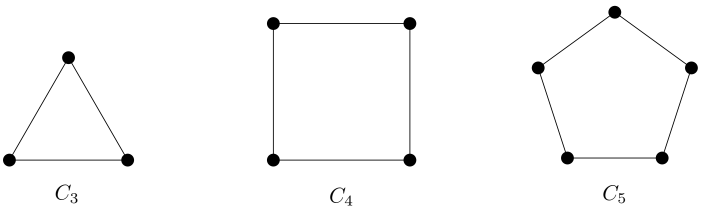


FIGURE 3 : Les premiers graphes cycles.

- ⇨ *Graphe de* FACEBOOK : Le graphe des utilisateurs de FACEBOOK a un sommet pour chaque utilisateur et une arête entre deux sommets lorsque les utilisateurs concernés sont « amis ». La relation d'amitié étant symétrique, il s'agit bien d'un graphe non orienté. Notons que $|S|$ est de l'ordre de 10^9 et $|A|$ de l'ordre de 10^{11}, ce qui pose bien sûr quelques difficultés algorithmiques.
- ⇨ *Graphe d'intervalles* : À un ensemble d'intervalles $(I_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$, on peut associer un graphe dont les sommets sont les I_k et qui possède une arête entre I_k et $I_{k'}$ si et seulement si $I_k \cap I_{k'} \neq \varnothing$.

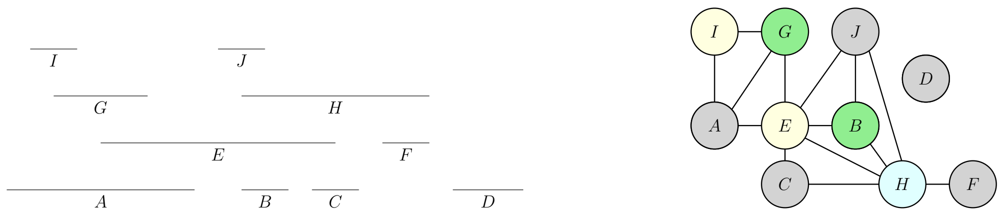


FIGURE 5 : Un ensemble d'intervalles et le graphe d'intersection associé.

On a ici *colorié les sommets* du graphe, c'est-à-dire associé à chaque sommet une couleur de manière à ce que deux sommets voisins aient deux couleurs différentes. Le coloriage choisi est optimal, en ce qu'il utilise le plus petit nombre de couleurs possible.

Définition 1.2

Soit $G := (S, A)$ un graphe. On dit que G a ses arêtes étiquetées par l'ensemble E lorsqu'on s'est donné une application $\varphi : A \to E$.

Définition 1.3

Soit $G := (S, A)$ un graphe. Étant donnée une énumération $x_0, \ldots, x_{n-1}$ de ses sommets, on appelle *matrice d'adjacence* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de G la matrice définie par

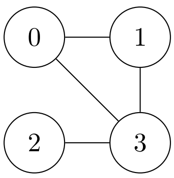
$$\forall i, j \in [\![0, n[\![, \quad m_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } x_i x_j \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque

⇨ La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique et sa diagonale ne contient que des 0.

Exemple

⇨ Voici un graphe et sa matrice d'adjacence.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.4

Soit $G := (S, A)$ un graphe. Alors
$$|A| \leqslant \frac{|S|(|S|-1)}{2}.$$

Remarques

⇨ La borne supérieure est atteinte pour les graphes complets K_n.

⇨ On retiendra surtout que le nombre d'arêtes est au plus de l'ordre de $|S|^2$.

Définition 1.5

On dit qu'un graphe $G := (S, A)$ est *creux* (ou *sparse* en anglais) lorsque son nombre d'arêtes est faible, c'est-à-dire lorsque
$$|A| \ll |S|^2.$$
Dans le cas contraire, on dit qu'il est *dense*.

Remarques

⇨ On parle aussi de *matrice creuse* pour désigner une matrice dont l'immense majorité des coefficients sont nuls. Un graphe est creux si et seulement si sa matrice d'adjacence est creuse.

⇨ Comme nous le verrons plus tard, le choix des « bons » algorithmes et des « bonnes » structures de données dépend souvent de la densité des graphes.

⇨ La « plupart » des graphes *rencontrés en pratique* sont creux. C'est par exemple le cas du graphe de Facebook ou de celui d'un réseau routier comme celui de Lyon.

Définition 1.6

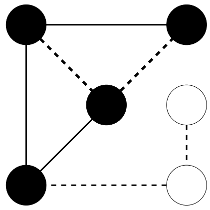
Soit $G := (S, A)$ un graphe.

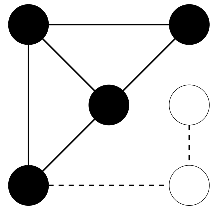
— On appelle *sous-graphe* de G tout couple $G' := (S', A')$ tel que S' est une partie non vide de S, A' est une partie de A et les extrémités des arêtes de A' sont des sommets de S'.

— Soit S' une partie non vide de S. On appelle *sous-graphe induit* par S' le sous-graphe $G' := (S', A')$ de G où A' est l'ensemble des arêtes de A reliant deux sommets de S'.

Remarque

⇨ Choisir un sous-graphe de G, c'est choisir un sous-ensemble des sommets de G et une partie des arêtes reliant ces sommets entre eux. Choisir un sous-graphe induit de G, c'est choisir un sous-ensemble des sommets et *toutes* les arêtes reliant ces sommets entre eux. Par exemple, à gauche, on définit un sous-graphe en ne gardant que les sommets noirs et les arêtes pleines. Ce n'est pas un sous-graphe induit, car il « manque » deux arêtes. Le sous-graphe de droite, lui, est bien un sous-graphe induit.





Exercice 1

⇨ *Nombre de sous-graphes* : On considère un graphe G à n sommets.

1. Combien G admet-il de sous-graphes induits ?
2. Donner un encadrement le plus précis possible du nombre de sous-graphes de G.

Définition 1.7

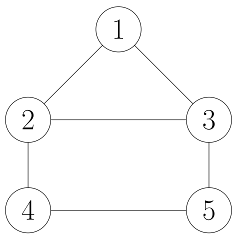
Soit $G := (S, A)$ et $G' := (S', A')$ deux graphes. On dit qu'une bijection $\varphi : S \to S'$ est un *isomorphisme de graphes* lorsque

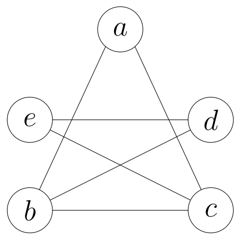
$$\forall x, y \in S, \quad \varphi(x)\varphi(y) \in A' \quad \Longleftrightarrow \quad xy \in A.$$

Deux graphes sont dits *isomorphes* lorsqu'il existe un isomorphisme entre eux.

Remarques

⇨ L'application qui envoie le sommet 1 du graphe de gauche sur le sommet a du graphe de droite, 2 sur b, 3 sur c, 4 sur d et 5 sur e est un isomorphisme.





Essentiellement, deux graphes sont isomorphes si et seulement si ils ne diffèrent que par les noms de leurs sommets.

⇨ Comme souvent en mathématiques, on fait généralement comme si deux graphes isomorphes étaient tout simplement *égaux*. Ainsi, la plupart des graphes dessinés depuis le début de ce chapitre l'ont été avec des sommets non étiquetés : cela revient à les considérer *à isomorphisme près*.

⇨ Un graphe est dit *planaire* lorsqu'il est isomorphe à un graphe où les sommets sont des points du plan et les segments représentant les arêtes ne se croisent pas. On peut montrer, mais c'est difficile, qu'un graphe est planaire si et seulement si il est isomorphe à un graphe dont les sommets sont des points du plan dont les arêtes sont représentées par des courbes qui ne se croisent pas.

1.2 Degré

Définition 1.8

On appelle *degré* d'un sommet x le nombre d'arêtes de la forme xy.

Remarque

⇨ Le degré d'un nœud est donc son nombre de voisins. La définition ci-dessus a l'avantage de pouvoir être étendue aux multigraphes.

Proposition 1.9: Lemme de la poignée de main

Soit $G := (S, A)$ un graphe non orienté. Alors

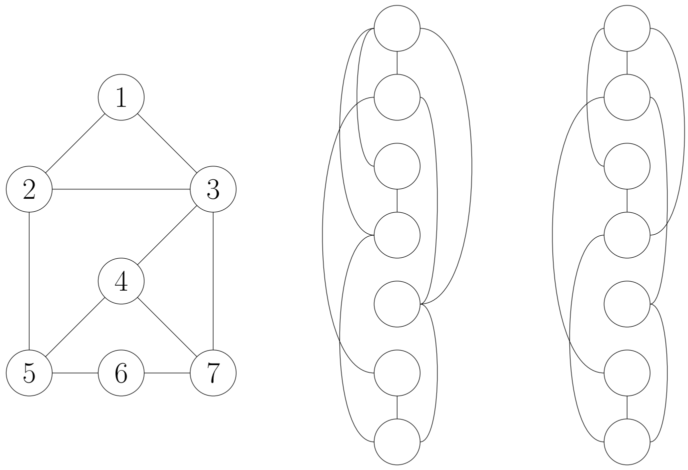
$$\sum_{x \in S} \mathrm{d}(x) = 2|A|.$$

Remarque

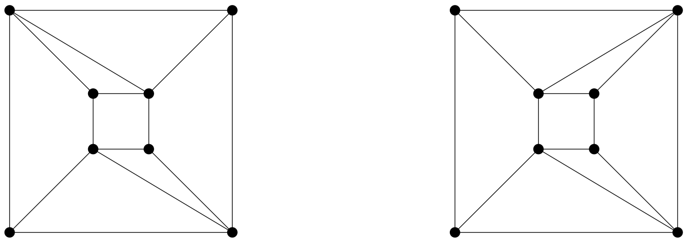
⇨ Un graphe à n sommets est donc creux si et seulement si le degré moyen de ses sommets est très petit devant n, dense sinon.

Exercice 2

⇨ 1. Montrer que le graphe G_1 est isomorphe à G_2 mais pas à G_3.



2. Montrer que H_1 n'est pas isomorphe à H_2.



1.3 Chemin

Définition 1.10

Dans un graphe $G := (S, A)$, on appelle *chemin* de longueur $n \in \mathbb{N}$ toute suite $c := x_0, \ldots, x_n$ de $n+1$ sommets telle que

$$\forall i \in [\![0, n[\![, \quad x_i x_{i+1} \in A.$$

On dit que x_0 et x_n sont les *extrémités* du chemin et que le chemin *relie* x_0 à x_n.

Remarques

⇨ Un chemin de longueur n est donc constitué de $n+1$ sommets et de n arêtes. Remarquons qu'on accepte les chemins de longueur nulle : ces chemins relient un sommet à lui-même et n'ont aucune arête.

⇨ Si $c := u, x_1, \ldots, x_{n-1}, v$ est un chemin de longueur n reliant u à v et $d := v, y_1, \ldots, y_{m-1}, w$ est un chemin de longueur m reliant v à w, alors $u, x_1, \ldots, x_{n-1}, v, y_1, \ldots, y_{m-1}, w$ est un chemin de longueur $n + m$ reliant u à w. On dit que c'est le chemin obtenu par *concaténation* de c et d.

Définition 1.11

Soit $c := x_0, \ldots, x_n$ un chemin.

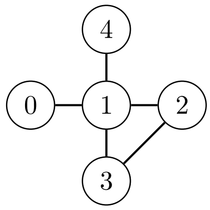
— On dit qu'il est *élémentaire* lorsqu'il ne passe pas deux fois par le même sommet, c'est-à-dire lorsque les x_i sont deux à deux distincts.

— On dit qu'il est *simple* lorsqu'il ne passe pas deux fois par la même arête, c'est-à-dire lorsque les $x_i x_{i+1}$ sont deux à deux distincts.

Remarques

⇨ Un chemin élémentaire est simple.

⇨ Cependant, il existe des chemins simples qui ne sont pas élémentaires. Par exemple, dans le graphe ci-dessous, le chemin $0, 1, 2, 3, 1, 4$ est simple mais il n'est pas élémentaire



1.4 Connexité

Définition 1.12

On dit qu'un sommet y est *accessible* depuis le sommet x lorsqu'il existe un chemin reliant x à y.

Remarques

- Si y est accessible depuis x, alors x est accessible depuis y ; on dit que x et y sont *connectés*.
- Puisqu'on accepte les chemins de longueur nulle, un sommet est toujours accessible depuis lui-même.

Proposition 1.13

Soit x et y deux sommets. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Il existe un chemin reliant x à y.
- Il existe un chemin simple reliant x à y.
- Il existe un chemin élémentaire reliant x à y.

Remarque

- Lorsqu'on s'intéresse à des questions d'accessibilité, il est donc possible de se restreindre aux chemins simples ou élémentaires.

Proposition 1.14

Dans un graphe non orienté, la relation d'accessibilité est une relation d'équivalence.

Remarque

- Si x est un sommet, on note S_x l'ensemble des sommets du graphe accessibles depuis x. C'est la classe d'équivalence de x pour la relation d'accessibilité.
- Si x et y sont deux sommets, alors
$$y \in S_x \iff S_y = S_x.$$

Définition 1.15

On dit qu'un graphe est *connexe* lorsque, quels que soient les sommets x et y, il existe un chemin reliant x à y.

Remarque

- Un graphe est connexe si et seulement si la relation d'accessibilité ne possède qu'une seule classe d'équivalence.

Proposition 1.16

Un graphe connexe à n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.

Définition 1.17

Si x est un sommet de G, on appelle *composante connexe* de x le sous-graphe G_x induit par S_x. C'est un graphe connexe.

Remarques

- Un sous-graphe G' de G est appelé composante connexe de G lorsqu'il existe un sommet x de G tel que $G' = G_x$.
- On montre que les composantes connexes de G sont les sous-graphes induits connexes maximaux de G, c'est-à-dire ceux pour lesquels on ne peut rajouter de sommet sans perdre la connexité.
- Soit $G \coloneqq (S, A)$ un graphe et $(G_1, \ldots, G_n)$ la famille des composantes connexes de G. Si on note $G_i = (S_i, A_i)$, alors $G_1, \ldots, G_n$ sont connexes, $(S_1, \ldots, S_n)$ réalise une partition de S et $(A_1, \ldots, A_n)$ réalise une partition de A.

1.5 Cycle

Définition 1.18

On appelle *cycle* tout chemin simple de longueur non nulle dont les deux extrémités sont identiques.

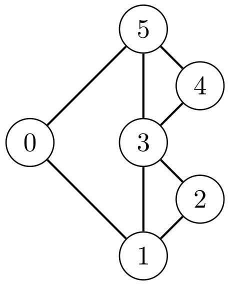
Remarques

⇨ Dans la définition d'un cycle, il est nécessaire de se limiter aux chemins simples. Sinon, les chemins de la forme x, y, x seraient des cycles. Par conséquent, la longueur d'un cycle est toujours supérieure ou égale à 3.

⇨ On appelle *cycle élémentaire* tout chemin $c \coloneqq x_0, \ldots, x_n$ de longueur n supérieure où égale à 3 dont les deux extrémités sont identiques et tels que les sommets $x_0, \ldots, x_{n-1}$ sont deux à deux distincts. Un cycle élémentaire est un cycle.

Exercices 3

⇨ On considère le graphe suivant :



1. Déterminer un cycle qui n'est pas élémentaire.
2. Donner la liste de tous ses cycles élémentaires.

⇨ Soit G un graphe de degré minimal $d \geqslant 2$. Montrer que G possède un chemin élémentaire de longueur supérieure ou égale à d ainsi qu'un cycle élémentaire de longueur supérieure ou égale à $d + 1$.

Définition 1.19

On dit qu'un graphe est *acyclique* lorsqu'il ne contient pas de cycle.

Remarque

⇨ Un sous-graphe d'un graphe acyclique est acyclique.

Proposition 1.20

Soit G un graphe. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :
- G admet un cycle.
- G admet un cycle élémentaire.

Remarque

⇨ Puisque tout cycle contient un cycle élémentaire, on en déduit qu'un graphe est acyclique si et seulement si il ne contient pas de cycle élémentaire.

Proposition 1.21

Un graphe acyclique à n sommets possède au plus $n - 1$ arêtes.

1.6 Arbre

Définition 1.22

On dit qu'un graphe est un *arbre* lorsqu'il est acyclique et connexe.

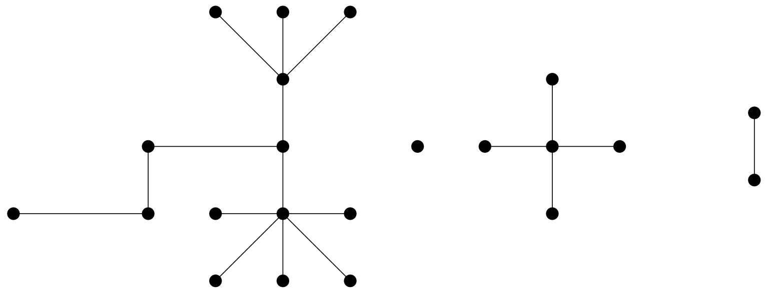
Remarques

⇨ Un graphe acyclique est aussi appelé *forêt*. Ses composantes connexes sont des arbres.

⇨ Cette notion d'arbre ne correspond pas exactement à celle couramment utilisée en informatique.

Exemple

⇨ Voici par exemple une forêt constituée de quatre arbres.



Soit $G := (S, A)$ un graphe. Si x et y sont deux sommets distincts non adjacents, on note $G + xy$ le graphe $(S, A \cup \{xy\})$. Si x et y sont deux sommets adjacents, on note $G - xy$ le graphe $(S, A \setminus \{xy\})$.

Proposition 1.23: Lemme du pont

Soit $G := (S, A)$ un graphe et x, y deux sommets distincts de G.
- Si x et y sont connectés, mais $xy \notin A$, alors $G' := G + xy$ possède un cycle passant par xy.
- Si x et y ne sont pas connectés, alors $G' := G + xy$ ne possède pas de cycle passant par xy.

Exercice 4

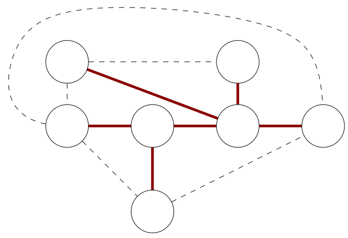
⇨ Soit G un graphe connexe. On dit qu'une arête xy de G est un *pont* lorsque $G - xy$ n'est pas connexe. Montrer que xy est un pont si et seulement si il n'existe pas de cycle passant par xy.

Proposition 1.24

Soit G un graphe. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :
- G est un arbre.
- G est acyclique maximal : on ne peut rajouter d'arête sans perdre l'acyclicité.
- G est connexe minimal : on ne peut enlever d'arête sans perdre la connexité.

Exercice 5

⇨ *Existence d'un arbre couvrant* : On dit qu'un sous-graphe T d'un graphe $G := (S, A)$ est un *arbre couvrant* de G lorsque c'est un arbre et son ensemble de sommets est exactement S. Montrer que tout graphe connexe admet un arbre couvrant.



Un graphe et l'un de ses arbres couvrants (arêtes en gras).

Proposition 1.25

Soit G un graphe à n sommets. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :
- G est un arbre.
- G est acyclique et possède $n - 1$ arêtes.
- G est connexe et possède $n - 1$ arêtes.

Remarque

⇨ Si G est un graphe possédant c composantes connexes $G_1, \dots, G_c$, alors il est acyclique si et seulement si ses composantes connexes le sont. Si on note n le nombre de sommets de G et p son nombre d'arêtes, G est donc acyclique si et seulement si $p = n - c$.

Proposition 1.26

Un graphe est un arbre si et seulement si pour tous sommets x et y, il existe un unique chemin élémentaire reliant x à y.

1.7 Coloration de graphe

Définition 1.27

Une k-coloration d'un graphe $G \coloneqq (S, A)$ est une application $\varphi : S \to [\![1, k]\!]$ telle que

$$\forall x, y \in S, \quad xy \in A \quad \Longrightarrow \quad \varphi(x) \neq \varphi(y).$$

Remarque

- ⇨ L'entier $\varphi(x)$ est appelé *couleur* de x. On exige donc que deux sommets adjacents soient toujours colorés différemment.

Définition 1.28

- — On dit qu'un graphe est *k-colorable* lorsqu'il admet une k-coloration.
- — On appelle *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe G le plus petit entier k tel qu'il est k-colorable.

Remarques

- ⇨ $\chi(G)$ est bien défini puisqu'il est toujours possible de colorer un graphe à n sommets en utilisant n couleurs.
- ⇨ Si G' est un sous-graphe de G, alors $\chi(G') \leqslant \chi(G)$.

Exemple

- ⇨ Une application classique de la coloration de graphes est le problème de l'*allocation de registres*. Quand on compile une fonction faisant intervenir n variables, on aimerait idéalement stocker chacune de ces variables dans l'un des p registres du processeur. Si $p \geqslant n$, ce n'est pas un problème, mais ce n'est généralement pas le cas. Cependant, il est possible de stocker plusieurs variables dans le même registre à condition que leurs durées de vie ne se chevauchent pas. On peut alors construire un *graphe d'interférence* des variables, avec une arête entre x et y si les durées de vie de x et y ne sont pas disjointes, et tenter de colorier ce graphe avec un nombre minimal de couleurs, les couleurs correspondant ici aux registres.

Exercice 6

- ⇨ On appelle *clique* d'un graphe $G \coloneqq (S, A)$ toute partie X de S tel que $xy \in A$ pour tous x, y distincts de X. On note $\omega(G)$ le cardinal maximum d'une clique de G. On note également

$$\Delta(G) \coloneqq \max_{x \in S} \mathrm{d}(x)$$

le degré maximum de G.

1. Montrer que $\omega(G) \leqslant \chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.
2. Montrer que ces inégalités sont optimales en général.
3. L'une ou l'autre de ces inégalités est-elle une égalité dans le cas général ?

2 Graphe orienté

2.1 Définition

Définition 2.1

On appelle *graphe orienté* tout couple $G \coloneqq (S, A)$ tel que :

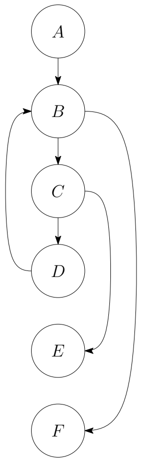
- — S est un ensemble fini non vide dont les éléments sont appelés *sommets* ou *noeuds*.
- — A est un ensemble dont les éléments, appelés *arcs*, sont des couples d'éléments distincts de S.

Remarques

- ⇨ Intuitivement, un arc (x, y) permet de passer du sommet x au sommet y mais pas de y à x ; on le notera $x \to y$. S'il y a un arc $x \to y$, on dit que y est un *successeur* de x et que x est un *prédécesseur* de y.
- ⇨ Si $G \coloneqq (S, A)$ est un graphe non orienté, on peut créer un graphe orienté à parir de G en orientant chacune de ses arêtes. Réciproquement, en « oubliant » l'orientation, on peut toujours obtenir un graphe non orienté à partir d'un graphe orienté simple ; si les arcs $x \to y$ et $y \to x$ sont tous les deux présents, on ne garde qu'une arête xy.
- ⇨ On pourrait aussi considérer les graphes non orientés comme des cas particuliers de graphes orientés : ceux pour lesquels dès que $x \to y \in A$, on a $y \to x \in A$.
- ⇨ Tout comme les graphes non orientés, on peut rencontrer des graphes orientés possédant des arêtes reliant un sommet à lui-même (on parle de *boucle*) ou des sommets reliés par plusieurs arêtes. De tels graphes sont appelés *multigraphes*, par opposition aux graphes définis dans ce cours qu'on appelle graphes *simples*.

Exemples

- *Graphe du Web* : Le graphe du Web possède un sommet pour chaque page web et un arc de a vers b si la page a contient un lien vers la page b. C'est ce graphe que les moteurs de recherche parcourent pour construire leur index. La taille du graphe du Web est inconnue, mais l'index de Google contient un peu plus de 50 milliards de pages.
- *Graphe de flot de contrôle* : Les graphes jouent un rôle central dans la *compilation*, c'est-à-dire la traduction de programmes écrits dans des langages de haut niveau (comme OCaml, C, Java) vers des langages de bas niveau (code machine x86 pour les processeurs de la famille Intel, code machine Arm pour les processeurs utilisés dans la plupart des téléphones portables, *bytecode* pour la Java Virtual Machine). Les deux graphes les plus importants dans ce contexte sont :
  - Le *graphe d'appels* (*call graph* en anglais) qui a un sommet pour chaque fonction et un arc de f vers g si f contient un appel à g.
  - Le *graphe de flot de contrôle* (ou *control flow graph*) qui a un sommet pour chaque *bloc de base* et un arc de A vers B si l'on peut (a priori) exécuter B immédiatement après A. Un bloc de base est une suite d'instructions consécutives ne contenant ni saut ni cible de saut.



Un exemple de *control flow graph*

```
1:   (A)  s := 0
2:   (A)  i := 0
3:   (B)  if i >= len(t) then GOTO 9
4:   (C)  s := s + t[i]
5:   (C)  if s > 10 then GOTO 8
6:   (D)  i := i + 1
7:   (D)  GOTO 3
8:   (E)  return 100
9:   (F)  s := s * s
10:  (F)  return s
```

Le code en pseudo-assembleur correspondant au *graphe de flot de contrôle* de gauche. Pouvez-vous écrire une fonction C donnant ce pseudo-assembleur ?

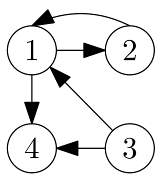
Définition 2.2

Soit $G := (S, A)$ un graphe orienté. Étant donnée une énumération $x_0, \dots, x_{n-1}$ des sommets, on appelle *matrice d'adjacence* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de G la matrice définie par

$$\forall i, j \in [\![0, n[\![, \quad m_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \to x_j \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple

- Voici un graphe orienté et sa matrice d'adjacence.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.3

Soit $G := (S, A)$ un graphe orienté. Alors
$$|A| \leqslant |S|(|S| - 1).$$

Remarque

- Tout comme les graphes non orientés, on dit qu'un graphe orienté est *creux* lorsque $|A| \ll |S|^2$.

2.2 Degré

Définition 2.4

Dans un graphe orienté, on définit pour tout sommet x
- son *degré entrant*, noté $d_-(x)$, le nombre d'arcs de la forme $y \to x$.
- son *degré sortant*, noté $d_+(x)$, le nombre d'arcs de la forme $x \to y$.
- son *degré total*, noté $\mathrm{d}(x)$ la somme de son degré entrant et de son degré sortant.

Remarque

⇨ De même, dans un graphe orienté, le degré entrant d'un sommet est son nombre de prédécesseurs et le degré sortant son nombre de successeurs.

Proposition 2.5: Lemme de la poignée de main

Soit $G \coloneqq (S, A)$ un graphe orienté. Alors

$$\sum_{x \in S} \mathrm{d}_-(x) = |A| \qquad \text{et} \qquad \sum_{x \in S} \mathrm{d}_+(x) = |A|.$$

Remarques

⇨ On a donc

$$\sum_{x \in S} \mathrm{d}(x) = 2|A|.$$

En particulier, un graphe orienté à n sommets est creux si et seulement si son degré total moyen est très petit devant n, et dense sinon.

2.3 Chemin

Définition 2.6

Dans un graphe orienté $G \coloneqq (S, A)$, on appelle *chemin* de longueur $n \in \mathbb{N}$ toute suite $c \coloneqq x_0, \ldots, x_n$ de $n+1$ sommets telle que

$$\forall i \in [\![0, n[\![, \quad x_i \to x_{i+1} \in A.$$

On dit que x_0 et x_n sont les *extrémités* du chemin et qu'il *relie* x_0 à x_n.

Remarques

⇨ On dit que le chemin est *élémentaire* lorsqu'il ne passe pas deux fois par le même sommet et qu'il est *simple* lorsqu'il ne passe pas deux fois par le même arc. Comme dans le cas des graphes non orientés, un chemin élémentaire est simple mais la réciproque est fausse.

⇨ Contrairement à ce qui se passe dans un graphe non orienté, dans un graphe orienté, le chemin x, y, x est simple car les arcs $x \to y$ et $y \to x$ sont distincts.

2.4 Arbre enraciné

Définition 2.7

On dit qu'un arbre, c'est-à-dire un graphe non orienté connexe acyclique, est *enraciné* lorsqu'on a distingué un de ses sommets que l'on appelle *racine*.

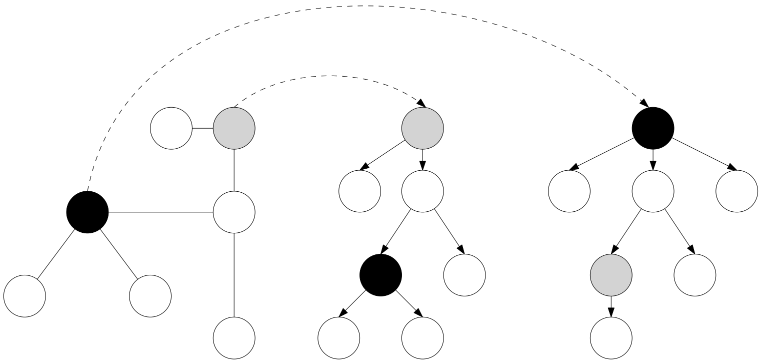
Définition 2.8

Soit $G \coloneqq (S, A)$ un arbre enraciné en $r \in S$.
- Pour tout $x \in S$, on appelle *profondeur* du sommet x la longueur de l'unique chemin élémentaire reliant x à y.
- On oriente G de la manière suivante : si $xy \in A$, alors soit $\mathrm{d}(r, y) = \mathrm{d}(r, x) + 1$, soit $\mathrm{d}(r, x) = \mathrm{d}(r, y) + 1$. Dans le premier cas, on remplace l'arête xy par l'arc $x \to y$ et dans le second cas, on la remplace par l'arc $y \to x$.

Remarques

⇨ Ainsi orientés, tous les nœuds sauf la racine ont un degré entrant égal à 1. La racine a un degré entrant égal à 0.

⇨ On retrouve donc presque la structure usuelle d' « arbre » utilisée en informatique. Attention cependant, les enfants d'un sommet ne sont pas ordonnés entre eux.



Un arbre, et deux manières de l'enraciner

Exercice 7

⇨ *Feuilles et nœuds internes* : Soit G un arbre possédant un nombre de sommets $n \geqslant 2$. Un sommet de G est appelé *feuille* lorsque son degré vaut 1 et *noeud interne* sinon.

1. Montrer que G possède au moins deux feuilles.
2. Soit $k \geqslant 2$. Si $r \in S$, on dit que l'arbre G enraciné en r est *k-aire* lorsque sa racine et tous ses noeuds internes ont un degré sortant égal à k, c'est-à-dire k successeurs. L'arbre G est dit k-aire si l'on peut l'enraciner de manière à obtenir un arbre enraciné k-aire.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les degrés des nœuds pour que G soit k-aire.
   (b) Dans le cas où G est un arbre k-aire, déterminer une relation entre le nombre de feuilles et le nombre de nœuds internes.

2.5 Forte connexité

Définition 2.9

On dit qu'un sommet y est *accessible* depuis le sommet x lorsqu'il existe un chemin reliant x à y.

Remarque

⇨ Attention, contrairement à ce qui se passe pour les graphes non orientés, la relation « est accessible depuis » n'est pas une relation d'équivalence. En effet, en général, elle n'est pas symétrique.

Définition 2.10

On dit qu'un sommet y est *fortement connecté* au sommet x lorsque y est accessible depuis x et x est accessible depuis y.

Proposition 2.11

La relation « est fortement connecté à » est une relation d'équivalence.

Remarque

⇨ Si x est un sommet, on note S_x l'ensemble des sommets du graphe fortement connectés à x. C'est la classe d'équivalence de x pour la relation « est fortement connecté à ».

Définition 2.12

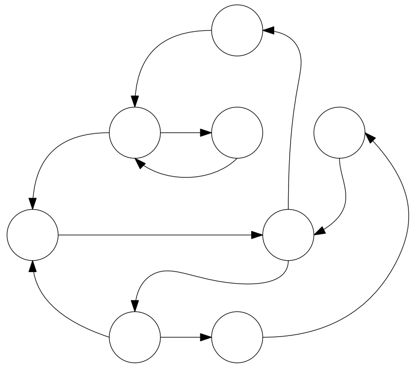
On dit qu'un graphe est « fortement connexe » lorsque, quels que soient les sommets x et y, il existe un chemin reliant x à y et un chemin reliant y à x.

Remarques

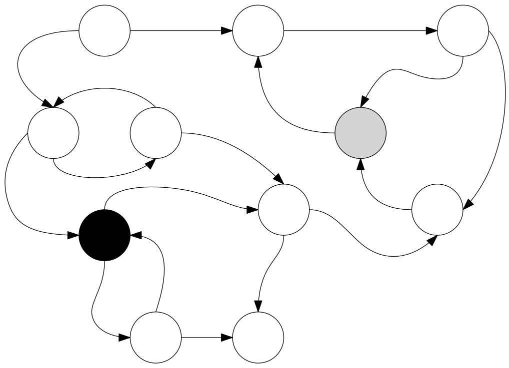
⇨ Un graphe est fortement connexe si et seulement si la relation « est fortement connecté à » ne possède qu'une seule classe d'équivalence.

⇨ On dit qu'un graphe est « faiblement connexe » lorsque le graphe non orienté obtenu en supprimant l'orientation des arcs est connexe. Un graphe orienté fortement connexe est faiblement connexe mais la réciproque est fausse.

Par exemple, le graphe ci-dessous est fortement connexe, donc faiblement connexe



Par contre, le graphe ci-dessous est faiblement connexe mais n'est pas fortement connexe. Dans ce graphe, le sommet gris est accessible depuis le sommet noir mais, le sommet noir n'est pas accessible depuis le sommet gris.



Définition 2.13

Si x est un sommet de G, on appelle *composante fortement connexe* de x le sous-graphe G_x induit par S_x. C'est un graphe fortement connexe.

Remarques

- ⇨ Un sous-graphe G' de G est appelé composante fortement connexe de G lorsqu'il existe un sommet x de G tel que $G' = G_x$.
- ⇨ On montre que les composantes fortement connexes de G sont les sous-graphes induits fortement connexes maximaux de G, c'est-à-dire ceux pour lesquels on ne peut rajouter de sommet sans perdre la forte connexité.
- ⇨ Soit $G \coloneqq (S, A)$ un graphe et $(G_1, \dots, G_n)$ la famille des composantes fortement connexes de G. Si on note $G_i = (S_i, A_i)$, alors $G_1, \dots, G_n$ sont fortement connexes, $(S_1, \dots, S_n)$ réalise une partition de S mais $(A_1, \dots, A_n)$ ne réalise pas en général une partition de A.

Exercice 8

- ⇨ Déterminer les composantes fortement connexes du graphe de la figure du graphe non fortement connexe donné au-dessus.

2.6 Cycle

Définition 2.14

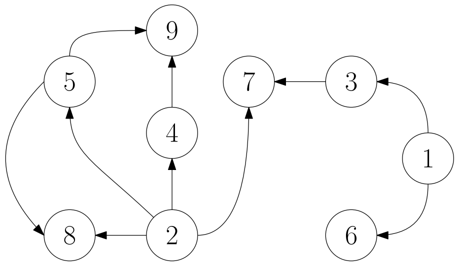
On appelle *cycle* tout chemin simple de longueur non nulle dont les deux extrémités sont identiques.

Définition 2.15

On appelle *graphe orienté acyclique* (ou DAG pour *directed acyclic graph*) tout graphe orienté ne possédant pas de cycle.

Remarques

- ⇨ Le graphe obtenu en oubliant l'orientation d'un DAG n'est en règle générale pas acyclique, comme le montre la figure suivante.



- ⇨ Contrairement aux graphes non orientés, si un graphe orienté $G = (S, A)$ possède un chemin de longueur non nulle dont les deux extrémités sont identiques, alors il possède un cycle.
- ⇨ Dans un graphe orienté acyclique possédant n sommets, les chemins sont de longueur au plus $n - 1$.

Exercices 9

- ⇨ *Graphe des composantes fortement connexes* : À un graphe orienté $G := (S, A)$, on peut associer le graphe $G' := (S', A')$ de ses composantes fortement connexes, défini par :
  — S' est l'ensemble $\{S_1, \dots, S_n\}$ des sommets des composantes fortement connexes de G.
  — A' contient un arc $S_i \to S_j$ si et seulement si il existe $x \in S_i$ et $y \in S_j$ tels que $x \to y \in A$.
  Montrer que G' est un graphe orienté acyclique.
- ⇨ Dans un graphe orienté, on appelle *racine* tout sommet de degré entrant nul et *feuille* tout sommet de degré sortant nul. Montrer qu'un graphe orienté acyclique possède au moins une racine et au moins une feuille.

Définition 2.16: Ordre topologique

On appelle *ordre topologique* sur un graphe orienté $G := (S, A)$ toute énumération $x_1, \dots, x_n$ de ses sommets telle que
$$\forall i, j \in [\![0, n[\![, \quad x_i \to x_j \in A \quad \Longrightarrow \quad i < j.$$
Une telle énumération est notée
$$x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec x_n.$$

Proposition 2.17

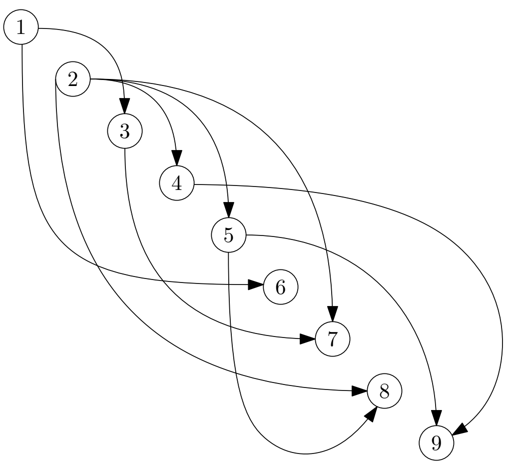
Un graphe orienté admet un ordre topologique si et seulement si il est acyclique.

Remarques

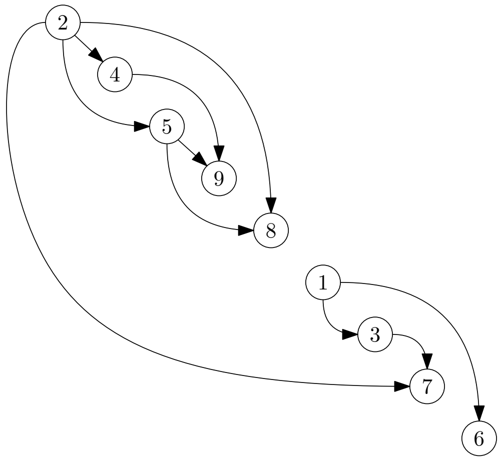
- ⇨ Le problème consistant à déterminer un ordre topologique sur un DAG donné est appelé *tri topologique*.
- ⇨ Un DAG admet en général plusieurs ordres topologiques.
- ⇨ Une interprétation du problème du tri topologique est la suivante :
  — Les nœuds représentent des tâches à accomplir.
  — Les arcs représentent des dépendances : la présence de l'arc $x \to y$ signifie que la tâche y ne peut être traitée qu'une fois que la tâche x est terminée.
  — Un ordre topologique sur le graphe correspond alors à un ordonnancement admissible des tâches : à chaque fois que l'on traite une tâche, tous les pré-requis ont déjà été traités.

Exemple

- ⇨ Voici deux ordres topologiques sur le DAG donné plus haut.



$$1 \prec 2 \prec 3 \cdots \prec 9$$



$2 \prec 4 \prec 5 \prec 9 \prec 8 \prec 1 \prec 3 \prec 7 \prec 6$