Fractions rationnelles

Table des matières

1 Fraction rationnelle

1.1 Représentants d'une fraction rationnelle

Définition 1.1

Soit $\mathbb{K}$ un corps. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on admet qu'il existe un unique corps noté $\mathbb{K}(X)$ et appelé *corps des fractions rationnelles*, possédant les propriétés suivantes :

— $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau du corps $\mathbb{K}(X)$.

— Pour tout élément F de $\mathbb{K}(X)$, il existe un couple de polynômes (A, B) avec $B \neq 0$ tel que

$$F = \frac{A}{B}$$

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés *fractions rationnelles* à coefficients sur le corps $\mathbb{K}$.

Remarque

⇨ Plus généralement, si A est un anneau intègre, il existe un unique corps $\mathbb{K}$ tel que :

— A est un sous-anneau de $\mathbb{K}$.

— Pour tout $x \in \mathbb{K}$, il existe un couple $(a, b) \in A^2$ tel que $b \neq 0$ et $x = a/b$.

Ce corps est appelé *corps des fractions* de A. Le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Q}$, celui de $\mathbb{K}[X]$ est $\mathbb{K}(X)$.

Définition 1.2

Soit F une fraction rationnelle.

— On dit qu'un couple de polynômes (A, B) avec $B \neq 0$ est un *représentant* de F lorsque

$$F = \frac{A}{B}$$

— On dit que ce représentant est *irréductible* lorsque A et B sont premiers entre eux et qu'il est *unitaire* lorsque B est unitaire.

Exercice 1

⇨ Mettre sous forme irréductible les fractions rationnelles

$$\frac{X^2-1}{X^3-1} \quad \text{et} \quad \frac{X^2+X-2}{X^3-5X^2+8X-4}.$$

Proposition 1.3

Soit F une fraction rationnelle. Alors F admet un unique représentant irréductible unitaire (A, B). De plus :
- Les représentants de F sont les couples (QA, QB) où Q est un polynôme non nul.
- Les représentants irréductibles de F sont les couples $(\lambda A, \lambda B)$ où λ est un scalaire non nul.

1.2 Degré

Définition 1.4

Soit F une fraction rationnelle. L'entier relatif $\deg A - \deg B$ ne dépend pas de la représentation de F choisie ; on l'appelle *degré* de F.

Exemple

⇨ Par exemple

$$\deg\left(\frac{X+1}{X+2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \deg\left(\frac{X^2+1}{X^3+1}\right) = -1.$$

Proposition 1.5

Soit F et G deux fractions rationnelles.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $\deg F \leqslant n$ et $\deg G \leqslant n$, alors

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \deg(\lambda F + \mu G) \leqslant n.$$

- $\deg FG = \deg F + \deg G$

1.3 Racines, pôles et substitution

Définition 1.6

Soit F une fraction rationnelle et (A, B) un représentant irréductible de F. On dit qu'un scalaire α est
- une *racine* de F lorsque α est racine de A. Dans ce cas on définit l'*ordre de multiplicité de la racine* α comme son ordre de multiplicité en tant que racine de A.
- un *pôle* de F lorsque α est racine de B. Dans ce cas on définit l'*ordre de multiplicité du pôle* α comme son ordre de multiplicité en tant que racine de B.

Exercice 2

⇨ Donner les racines et les pôles de la fraction rationnelle

$$F := \frac{X^2 + X - 2}{X^3 - 5X^2 + 8X - 4}.$$

Définition 1.7

Soit F une fraction rationnelle sur le corps $\mathbb{K}$ et α un scalaire. Si α n'est pas un pôle de F, on définit $F(\alpha)$ par

$$F(\alpha) := \frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$$

où (A, B) est un représentant de F tel que α ne soit pas racine de B.

Proposition 1.8

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, F_1 et F_2 deux fractions rationnelles n'admettant pas α pour pôle et λ, $\mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda F_1 + \mu F_2$ et $F_1 F_2$ n'admettent pas α pour pôle et

$$\begin{aligned} (\lambda F_1 + \mu F_2)(\alpha) &= \lambda F_1(\alpha) + \mu F_2(\alpha) \\ (F_1 F_2)(\alpha) &= F_1(\alpha) F_2(\alpha) \end{aligned}$$

Définition 1.9

Soit F une fraction rationnelle. Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des pôles de F, on définit la fonction rationnelle $\tilde{F} : \mathbb{K}\backslash\mathcal{P} \to \mathbb{K}$ par

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathcal{P}, \quad \tilde{F}(x) \coloneqq F(x)$$

1.4 Conjugaison sur $\mathbb{C}(X)$

Définition 1.10

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On définit la fraction rationnelle $\overline{F}$ par

$$\overline{F} \coloneqq \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

Proposition 1.11

Soit $F, G \in \mathbb{C}(X)$.

- Si $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} \overline{\lambda F + \mu G} &= \overline{\lambda}\,\overline{F} + \overline{\mu}\,\overline{G} \\ \overline{FG} &= \overline{F}\,\overline{G} \end{aligned}$$

- $\deg \overline{F} = \deg F$.

Proposition 1.12

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Alors

$$\overline{\overline{F}} = F \qquad \text{et} \qquad \left[F \in \mathbb{R}(X) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{F} = F\right].$$

Proposition 1.13

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors

- α est racine de F d'ordre $\omega \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{F}$ d'ordre ω.
- α est pôle de F d'ordre $\omega \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\overline{\alpha}$ est pôle de $\overline{F}$ d'ordre ω.

Remarque

⇨ En particulier, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de $F \in \mathbb{R}(X)$, alors $\overline{\alpha}$ est une racine de F et son ordre relativement à F est le même que celui de α. De même, si α est un pôle de F, alors $\overline{\alpha}$ est un pôle de F et son ordre relativement à F est le même que celui de α.

2 Décomposition en éléments simples

2.1 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}(X)$

Définition 2.1

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors il existe un unique couple (E, G) constitué d'un polynôme E appelé *partie entière* de F, et d'une fraction rationnelle G de degré strictement négatif tel que

$$F = E + G$$

En pratique E s'obtient comme le quotient de la division euclidienne de A par B où (A, B) est un représentant de F.

Exercice 3

⇨ Calculer la partie entière de

$$F \coloneqq \frac{X^3 + 2X^2 + 1}{X^2 + 1}.$$

Proposition 2.2: Décomposition en éléments simples

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On écrit F sous forme irréductible et on décompose son dénominateur en produit de polynômes irréductibles $P_1, \ldots, P_r$ deux à deux distincts

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{\lambda \prod_{k=1}^{r} P_k^{\alpha_k}}.$$

Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ ainsi qu'une unique famille de polynômes $R_{k,l} \in \mathbb{K}[X]$ avec $k \in [\![1, r]\!]$ et $l \in [\![1, \alpha_k]\!]$ tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{\alpha_k} \frac{R_{k,l}}{P_k^l}$$

et $\deg R_{k,l} < \deg P_k$.

2.2 Cas où le dénominateur est scindé

Proposition 2.3

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On écrit F sous forme irréductible et on suppose que son dénominateur est scindé

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{\lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k}}.$$

Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ ainsi qu'une unique famille de scalaires $a_{k,l} \in \mathbb{K}$ avec $k \in [\![1, r]\!]$ et $l \in [\![1, \omega_k]\!]$ tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,l}}{(X - \alpha_k)^l}.$$

Remarque

⇨ En reprenant les notations de la proposition ci-dessus, on dit que

$$\sum_{l=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,l}}{(X - \alpha_k)^l}$$

est la *partie polaire* de F relative au pôle α_k.

Proposition 2.4

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant $\alpha \in \mathbb{K}$ pour pôle simple

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X - \alpha)C} \qquad \text{avec } C(\alpha) \neq 0.$$

Alors, la partie polaire relative au pôle α est

$$\frac{a}{X - \alpha}$$

où a est donné par les deux formules équivalentes

$$a = \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}, \qquad a = \frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}.$$

Exercices 4

⇨ Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

$$\frac{X+3}{(X-1)(X+2)}, \qquad \frac{1}{X^2+1}, \qquad \frac{1}{X^n - 1}.$$

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}, \quad f(x) \coloneqq \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}.$$

Proposition 2.5

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant $\alpha \in \mathbb{K}$ pour pôle double

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X-\alpha)^2 C} \qquad \text{avec } C(\alpha) \neq 0.$$

Alors, la partie polaire relative au pôle α est

$$\frac{a_1}{X-\alpha} + \frac{a_2}{(X-\alpha)^2}$$

où a_2 est donné par

$$a_2 = \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}.$$

Exercices 5

⇨ Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples

$$\frac{X+1}{X^2\,(X-1)}, \qquad \frac{X^2+X+3}{X\,(X-1)^3}.$$

⇨ Calculer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}.$$

Proposition 2.6

Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$. On écrit

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X-\alpha_k}.$$

Remarque

⇨ Si P un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$. On écrit

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{\omega_k}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts et $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\omega_k}{X-\alpha_k}.$$

2.3 Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le dénominateur n'est pas scindé

Proposition 2.7

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. On écrit F sous forme irréductible et on décompose son dénominateur en produit de polynômes irréductibles

$$F = \frac{A}{\lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{\omega_k} \prod_{l=1}^{s} (X^2+b_l X+c_l)^{\omega'_l}}.$$

Alors, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$, ainsi que des uniques familles $(a_{k,i})$, $(b_{l,j})$ et $(c_{l,j})$ de réels tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,i}}{(X-\alpha_k)^i} \right) + \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{\omega'_l} \frac{b_{l,j} X + c_{l,j}}{(X^2+b_l X+c_l)^j} \right).$$

Remarque

⇨ Pour décomposer une fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$, il est possible d'effectuer sa décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ puis de regrouper les parties polaires ayant des pôles conjugués. Le plus souvent, on préfèrera cependant une décomposition directe dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 6

⇨ Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{X\left(X^2+1\right)}, \qquad \frac{1}{X\left(X^2+X+1\right)}, \qquad \frac{X^2+2}{X^2\left(X^2+1\right)}$$

$$\frac{1}{X^4+1}, \qquad \frac{X^7+2}{\left(X^2+X+1\right)^3}, \qquad \frac{1}{X^{2n}-1}.$$

3 Primitive d'expression rationnelle

3.1 Fractions rationnelles

Exercice 7

⇨ Calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}.$$

3.2 Fractions rationnelles en e^x

Pour ces fonctions, il suffit d'effectuer le changement de variable $u := \mathrm{e}^x$ pour se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

Exercice 8

⇨ Calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x}+1}.$$

3.3 Fractions rationnelles en $\cos x$, $\sin x$

Proposition 3.1: Règles de Bioche

Soit G une fraction rationnelle en $\cos x$, $\sin x$.

— Si $G(-x) = -G(x)$, il existe une fraction rationnelle F telle que

$$G(x) = F(\cos x)\sin x.$$

On est donc ramené, après le changement de variable $u = \cos x$, à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

— Si $G(\pi - x) = -G(x)$, il existe une fraction rationnelle F telle que

$$G(x) = F(\sin x)\cos x.$$

On est donc ramené, après le changement de variable $u = \sin x$, à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

— Si $G(\pi + x) = G(x)$, il existe une fraction rationnelle F telle que

$$G(x) = F(\tan x)\left(1+\tan^2 x\right).$$

On est donc ramené, après le changement de variable $u = \tan x$, à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

— Sinon, on effectue le changement de variable $u = \tan(x/2)$. En remarquant que

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

on est ramené à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

Exercice 9

⇨ Calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cos(2x)}, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \sin(2x)}, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}.$$

3.4 Fractions rationnelles en $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$

Si $f(x)$ est une fraction rationnelle en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$, alors c'est une fraction rationnelle en e^x. On peut donc calculer une primitive d'une telle fonction en posant $u \coloneqq e^x$.

Exercice 10

⇨ Calculer

$$\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} \, dx, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x + 2}.$$

3.5 Fractions rationnelles en x et $\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$, en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Si f s'écrit

$$f(x) = F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

où F est une fraction rationnelle à deux variables, le calcul d'une primitive de f se fait en effectuant le changement de variable

$$u \coloneqq \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

On a alors

$$x = \frac{du^n - b}{a - cu^n} \quad \text{et} \quad dx = G(u) \, du$$

où G est une fraction rationnelle. On est donc ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

On souhaite désormais calculer une primitive d'une fonction f de la forme

$$f(x) = F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

où F est une fraction rationnelle à deux variables.

— Si aX^2+bX+c admet une racine double réelle α (cas où $\Delta = 0$), on a $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$. L'expression est donc une fraction rationnelle sur chaque intervalle où $x - \alpha$ est de signe constant.

— Si aX^2+bX+c n'admet pas de racine réelle (cas où $\Delta < 0$), après mise sous forme canonique de aX^2+bX+c et changement de variable, on est ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $u, \sqrt{1+u^2}$. Il suffit alors d'effectuer le changement de variable $u \coloneqq \operatorname{sh} v$ pour se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $\operatorname{ch} v$, $\operatorname{sh} v$.

— Si aX^2+bX+c admet deux racines réelles (cas où $\Delta > 0$), après mise sous forme canonique de aX^2+bX+c et changement de variable, on est ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $u, \sqrt{1-u^2}$ ou en $u, \sqrt{u^2-1}$. Dans le premier cas, on effectue le changement de variable $u \coloneqq \cos v$ alors que dans le second cas on effectue le changement de variable $u \coloneqq \pm \operatorname{ch} v$.

Exercice 11

⇨ Calculer

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}, \qquad \int \operatorname{Arctan} \sqrt{1+x^2} \, dx.$$