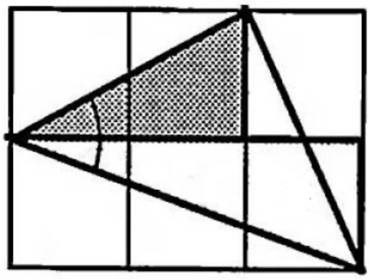
# Fonctions usuelles

« En mathématiques, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue. »

— John Von Neumann (1903–1957)

« Le logarithme de John Napier, en réduisant leur travail, a doublé la vie des astronomes. »

— Pierre-Simon Laplace (1749–1827)



« $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$. »

— Leonhard Euler (1707–1783)

## Table des matières



## 1 Logarithme, exponentielle, puissance

### 1.1 Logarithme népérien

**Définition 1.1**

On appelle *logarithme népérien* et on note ln l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1.

$$\ln : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \end{array}$$

**Remarque**

⇨ Le nom ln est à la fois l'acronyme de logarithme naturel et de logarithme népérien (en hommage à John Napier, mathématicien Écossais, 1550–1617).

**Proposition 1.2**

— ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
— ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln' x = \frac{1}{x}.$$

**Remarque**

⇨ La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln|x| \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1/x$. Autrement dit, sur $\mathbb{R}^*$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|.$$

**Proposition 1.3**

$$\begin{aligned} & & \ln 1 &= 0, \\ & \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, & \ln(xy) &= \ln x + \ln y, \\ & \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \ln(1/x) &= -\ln x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \forall n \in \mathbb{Z}, & \ln x^n &= n \ln x. \end{aligned}$$

**Proposition 1.4**

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \ln x.$$

**Proposition 1.5**

ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$$\ln x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \ln x \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty.$$

**Exercice 1**

⇨ Résoudre l'inéquation $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$.

**Proposition 1.6**

ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

**Définition 1.7**

Il existe un unique réel, noté e et appelé *nombre de Néper*, tel que $\ln \mathrm{e} = 1$.

**Proposition 1.8**

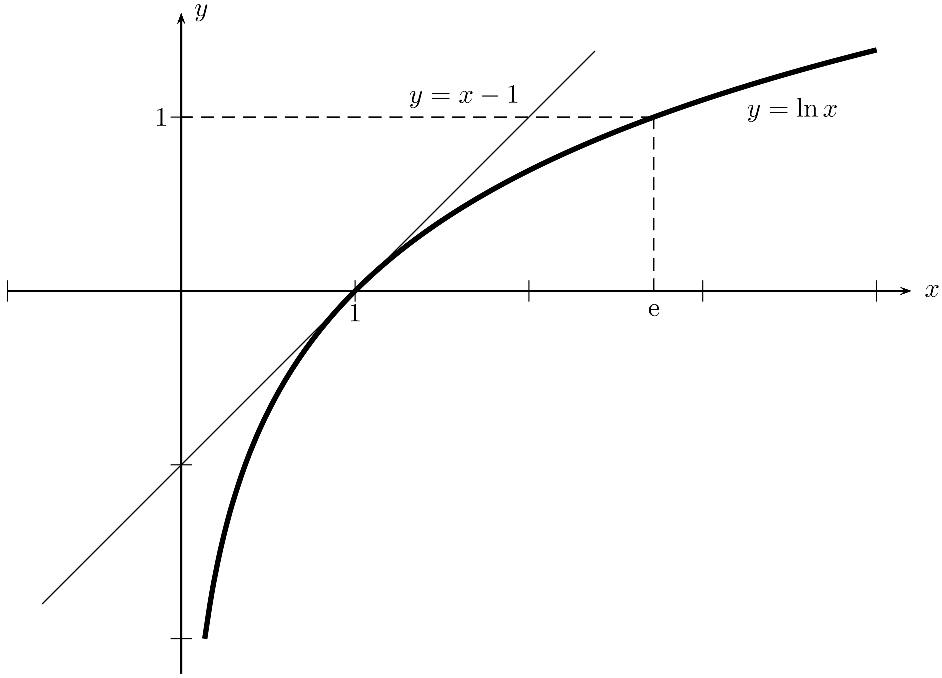
$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[, \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

**Exercice 2**

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

**Proposition 1.9**

$$\frac{x}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$
$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$




## 1.2 Exponentielle

**Définition 1.10**

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln x = y$ ; on le note $\exp y$. On définit ainsi la fonction

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ y & \longmapsto & \exp y. \end{array}$$

**Remarques**

⇨ Autrement dit, exp est la bijection réciproque de ln.

⇨ Par définition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x > 0.$$

**Proposition 1.11**

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, &\qquad \ln(\exp x) = x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, &\qquad \exp(\ln x) = x. \end{aligned}$$

**Proposition 1.12**

exp réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

**Proposition 1.13**

$$\begin{aligned} \exp 0 = 1, &\qquad \exp 1 = \mathrm{e}, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, &\qquad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y), \\ \forall x \in \mathbb{R}, &\qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, &\qquad \exp(nx) = (\exp x)^n . \end{aligned}$$

**Proposition 1.14**

exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\exp x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \exp x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

**Proposition 1.15**

- exp est continue sur $\mathbb{R}$.
- exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp' x = \exp x.$$

**Proposition 1.16**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x \geqslant 1 + x.$$

**Exercices 3**

⇨ Montrer que

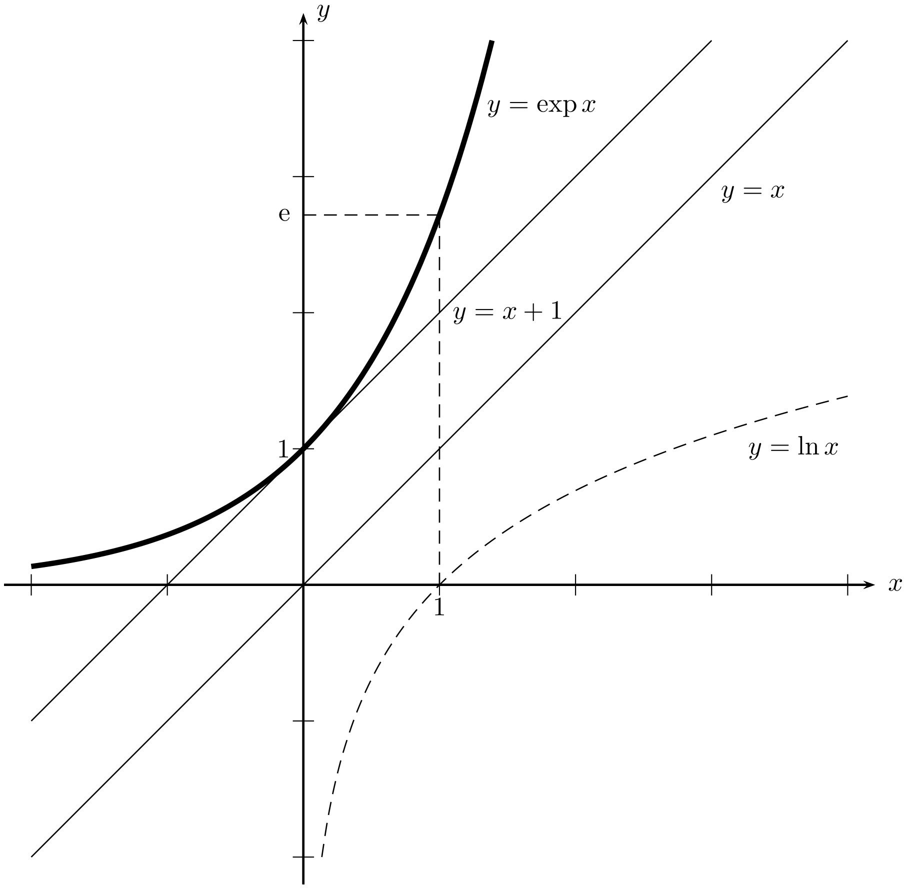
$$\forall x < 1, \quad \exp x \leqslant \frac{1}{1-x}.$$

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 < b\exp(-ax) - a\exp(-bx) < b - a.$$

**Proposition 1.17**

$$\frac{\exp x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \qquad x \exp x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0,$$
$$\frac{\exp(x) - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1.$$




## 1.3 Logarithme et exponentielle en base $a$

**Définition 1.18**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle *logarithme en base a* et on note $\log_a$ la fonction

$$\log_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a}. \end{array}$$

**Remarque**

⇨ Le logarithme népérien est le logarithme en base e. Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qui est utilisé en physique (pour définir les décibels) et en chimie (pour définir le pH).

**Exercice 4**

⇨ Résoudre le système

$$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = \mathrm{e}. \end{cases}$$

**Proposition 1.19**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad & \log_a(1/x) = -\log_a x, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad & \log_a x^n = n \log_a x. \end{aligned}$$

**Définition 1.20**

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\log_a x = y$ ; on le note $\exp_a y$ et on a

$$\exp_a y = \exp(y \ln a).$$

On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl}\exp_a : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & y & \longmapsto & \exp(y \ln a.)\end{array}$$

**Remarque**

➯ Lorsque $a = \mathrm{e}$, on retrouve la fonction exponentielle.

## 1.4 Fonction puissance

**Définition 1.21**

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit $x^y$ par

$$x^y := \exp(y \ln x).$$

**Remarques**

➯ En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x = \mathrm{e}^x$. Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) = a^x.$$

On utilisera désormais cette notation pour désigner l'exponentielle ainsi que l'exponentielle en base $a$.

➯ Afin de dériver une fonction de la forme $f(x) := u(x)^{v(x)}$, il est recommandé de la mettre sous la forme

$$f(x) = \mathrm{e}^{v(x) \ln(u(x))}.$$

**Exercices 5**

➯ Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$.

➯ Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x)$.

**Définition 1.22**

Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\begin{array}{rccl}\varphi_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^a.\end{array}$$

**Proposition 1.23**

$$\begin{array}{rrl}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, & x^0 = 1, & \forall a \in \mathbb{R}, \quad 1^a = 1, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a, b \in \mathbb{R}, & x^{a+b} = x^a x^b, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & x^{-a} = 1/x^a, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & (xy)^a = x^a y^a, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a, b \in \mathbb{R}, & (x^a)^b = x^{ab}, \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \forall a \in \mathbb{R}, & \ln(x^a) = a \ln x.\end{array}$$

**Proposition 1.24**

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_a : x \mapsto x^a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est

- continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$

**Proposition 1.25**

Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$x^a \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad x^a \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

**Remarque**

⇨ Si $a > 0$, on définit $0^a$ en posant $0^a := 0$. La fonction

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a \end{array}$$

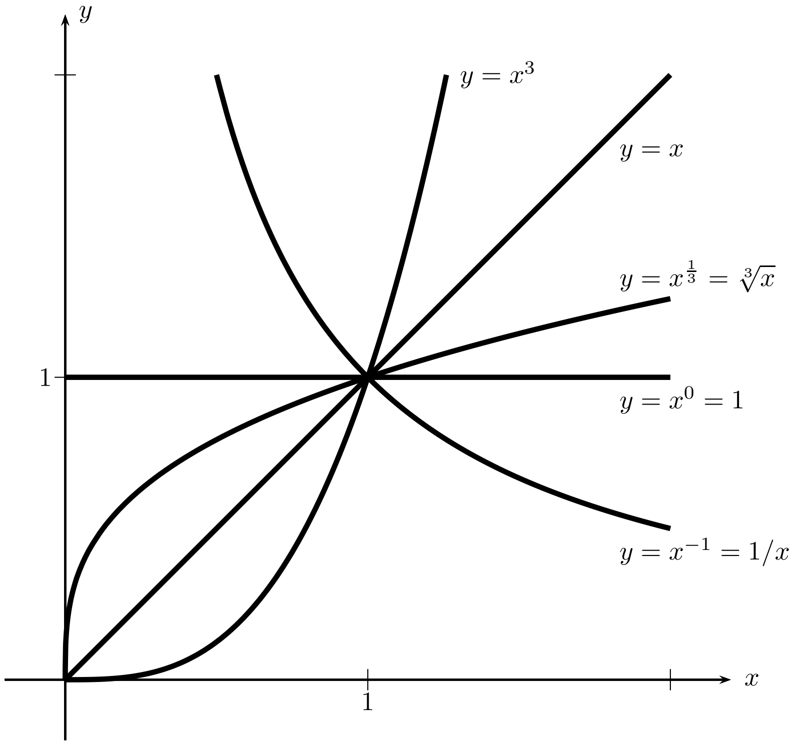
est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur

— $\mathbb{R}_+$ lorsque $a \geqslant 1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$

— $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $a < 1$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}.$$




**Proposition 1.26**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \geqslant 0, \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

## 1.5 Calcul de limite

**Proposition 1.27: Croissances comparées**

Soit $\alpha, \beta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \qquad \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty,$$

$$x^\alpha (\ln x)^n \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

**Remarques**

⇨ Mnémotechniquement, on dit qu'en 0 et en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

⇨ La technique essentielle dans le calcul des limites est la *factorisation par le terme principal* : lorsqu'on fait face à une somme de termes qui tendent vers $\pm\infty$, il est nécessaire de factoriser par le terme qui tend « le plus vite vers l'infini ».

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des polynômes, il convient de factoriser par le monôme de plus haut degré. Par exemple

$$2x^3 - x^2 + 1 = x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des fractions rationnelles, il convient de factoriser au numérateur et au dénominateur par le monôme de plus haut degré. Par exemple

$$\frac{x^2+2x-3}{2x^2-1} = \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{2-\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

— Pour calculer la limite en $\pm\infty$ des fractions rationnelles en $x$ et en $\mathrm{e}^x$, il convient d'utiliser les croissances comparées en se rappelant que l'exponentielle l'emporte sur les puissances en $-\infty$ et en $+\infty$. Par exemple

$$\mathrm{e}^x - x^5 = \mathrm{e}^x\left(1-\frac{x^5}{\mathrm{e}^x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty, \qquad \frac{\mathrm{e}^{2x}-2x\mathrm{e}^x}{x^3+3\mathrm{e}^{2x}} = \frac{1-2\frac{x}{\mathrm{e}^x}}{3+\frac{x^3}{\mathrm{e}^{2x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

— Pour calculer la limite en $+\infty$ ou en $0$ des fractions rationnelles en $\ln x, x$ et $\mathrm{e}^x$, il convient d'utiliser les croissances comparées en se rappelant que l'exponentielle l'emporte sur les puissances qui l'emportent sur le logarithme que ce soit en $+\infty$ ou en $0$.

⇨ Une autre technique importante est la technique du *changement de variable*. Elle se base sur le théorème de composition des limites. Le principe en est le suivant. Étant donné une fonction $f$ définie au voisinage de $a$, on cherche deux fonctions $g$ et $\bar{u}$ telles que sur ce voisinage

$$f(x) = g(\bar{u}(x)).$$

Si on connait la limite $l$ de $\bar{u}(x)$ lorsque $x$ tend vers $a$ et la limite $l'$ de $g(u)$ lorsque $u$ tend vers $l$, alors le théorème de composition des limites permet de conclure que $f(x)$ tend vers $l'$ lorsque $x$ tend vers $a$.

**Exercices 6**

⇨ Calculer la limite de

$$\frac{\mathrm{e}^x \ln x - x^{1000} + \mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+\ln x + x} \quad \text{en } +\infty.$$

⇨ Calculer les limites suivantes

$$\frac{(\ln x)^2}{\mathrm{e}^x} \quad \text{en } +\infty, \qquad \frac{1}{x}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{en } 0, \qquad \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}}{x^2} \quad \text{en } +\infty, \qquad |\ln x|^x \quad \text{en } 0\ .$$

# 2 Fonctions trigonométriques directes et réciproques

## 2.1 Fonctions trigonométriques directes

**Proposition 2.1**

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

**Proposition 2.2**

Les fonctions sin, cos et tan sont dérivables une infinité de fois sur leur ensemble de définition et

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \sin^{(n)} x = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \\
\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \cos^{(n)} x = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \\
\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right), \qquad & \tan' x = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

**Proposition 2.3**

On a

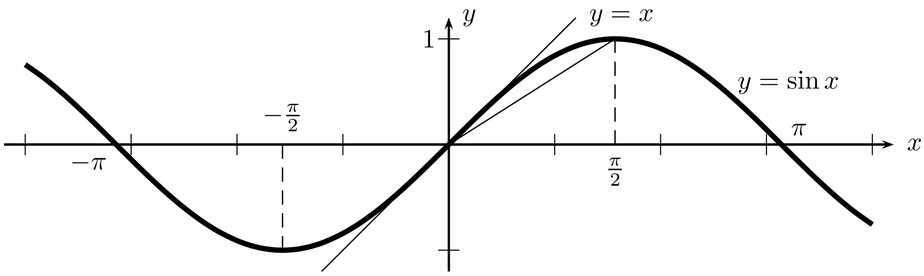
$$\begin{aligned}
\forall x \geqslant 0, \qquad & \sin x \leqslant x, \\
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad & |\sin x| \leqslant |x|\,.
\end{aligned}$$

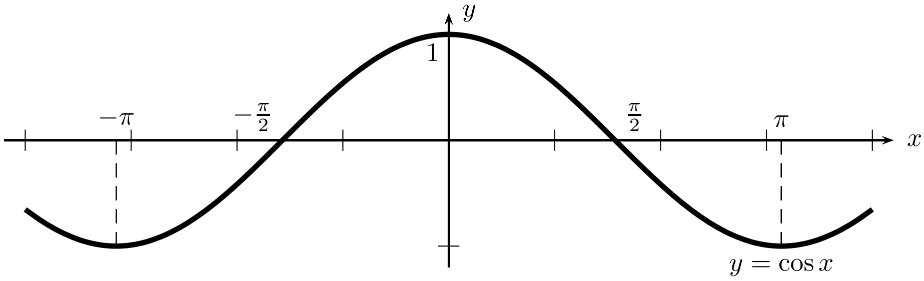
**Exercices 7**

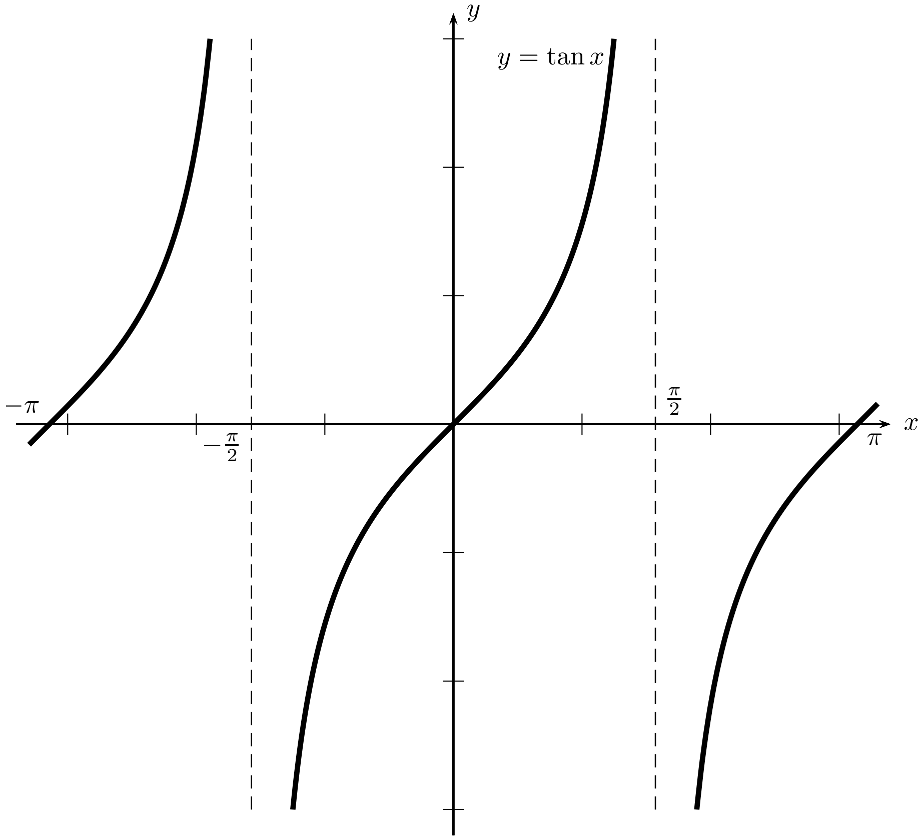
⇨ Montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x.$$

⇨ Calculer la dérivée $n$-ième de la fonction d'expression $\sin^3 x$.




## 2.2 Fonction Arcsin

**Définition 2.4**

Pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe un unique $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin x = y$ ; on le note $\operatorname{Arcsin} y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arcsin} : & [-1, 1] & \longrightarrow & [-\pi/2, \pi/2] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arcsin} y. \end{array}$$

**Remarque**

⇨ Autrement dit, sin réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$ et Arcsin est sa bijection réciproque.

**Proposition 2.5**

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1], \qquad & \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x, \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad & \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x. \end{aligned}$$

**Exercice 8**

⇨ Calculer

$$\operatorname{Arcsin}(1), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{5\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right).$$

**Proposition 2.6**

Arcsin réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

**Proposition 2.7**

— Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.
— Arcsin est impaire.

**Exercice 9**

⇨ On pose

$$x \coloneqq \operatorname{Arcsin}\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Calculer $\cos(4x)$ puis en déduire $x$.

**Proposition 2.8**

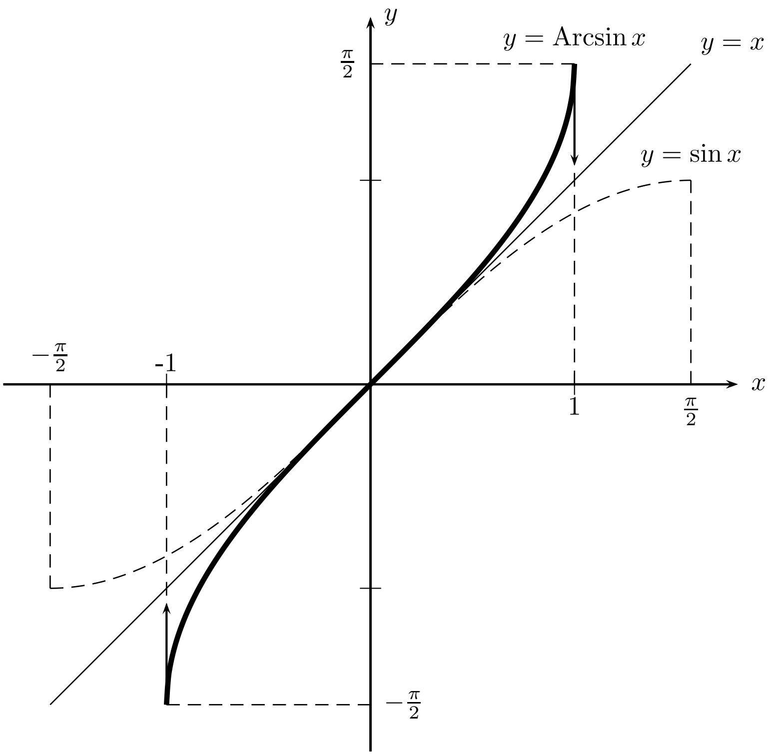
— Arcsin est continue sur $[-1,1]$.
— Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in \,]-1,1[, \quad \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Exercice 10**

⇨ Montrer que

$$\forall x \in [0,1[, \quad x \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$



## 2.3 Fonction Arccos

**Définition 2.9**

Pour tout $y \in [-1,1]$, il existe un unique $x \in [0,\pi]$ tel que $\cos x = y$ ; on le note $\operatorname{Arccos} y$. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arccos}: & [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi] \\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arccos} y. \end{array}$$

**Remarque**

⇨ Autrement dit, cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$ et Arccos est sa bijection réciproque.

**Proposition 2.10**

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1], \qquad & \cos(\operatorname{Arccos} x) = x, \\ \forall x \in [0,\pi], \qquad & \operatorname{Arccos}(\cos x) = x. \end{aligned}$$

**Exercices 11**

⇨ Calculer

$$\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right).$$

⇨ Simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos x) - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$ pour tout $x \in [0,2\pi]$.

⇨ Calculer $\cos(3\operatorname{Arccos} x)$.

**Proposition 2.11**

Arccos réalise une bijection de $[-1,1]$ dans $[0,\pi]$.

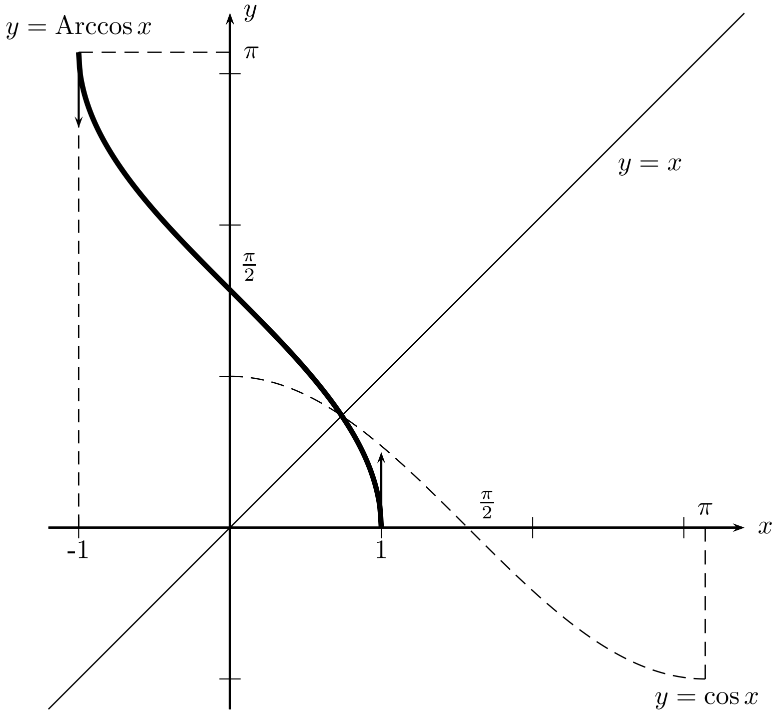
**Proposition 2.12**

Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

**Proposition 2.13**

- Arccos est continue sur $[-1,1]$.
- Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \operatorname{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$




## 2.4 Fonction Arctan

**Définition 2.14**

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ tel que $\tan x = y$ ; on le note $\operatorname{Arctan} y$. On définit ainsi la fonction

$$\operatorname{Arctan} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \left]-\pi/2, \pi/2\right[ \\ y & \longmapsto & \operatorname{Arctan} y. \end{array}$$

**Remarque**

⇨ Autrement dit, tan réalise une bijection de $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$ dans $\mathbb{R}$ et Arctan est sa bijection réciproque.

**Proposition 2.15**

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, &\qquad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x, \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, &\qquad \operatorname{Arctan}(\tan x) = x. \end{aligned}$$

**Exercices 12**

⇨ Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\tan \frac{1789\pi}{45}\right)$.

⇨ Le langage de programmation Shadok dispose de la fonction Arctan mais pas de la fonction Arcsin. Exprimez cette dernière à partir de la fonction Arctan.

**Proposition 2.16**

Arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

**Proposition 2.17**

— Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

— Arctan est impaire.

**Exercice 13**

⇨ Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

**Remarque**

⇨ On a
$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{2}+\operatorname{Arctan}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.$$
Cette formule est utile pour calculer des approximations de $\pi$. En effet, nous développerons des techniques pour calculer des valeurs approchées de $\operatorname{Arctan} x$, qui seront d'autant plus efficaces que $x$ est proche de 0.

**Proposition 2.18**

— Arctan est continue sur $\mathbb{R}$.
— Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \operatorname{Arctan}' x=\frac{1}{1+x^2}.$$

**Exercice 14**

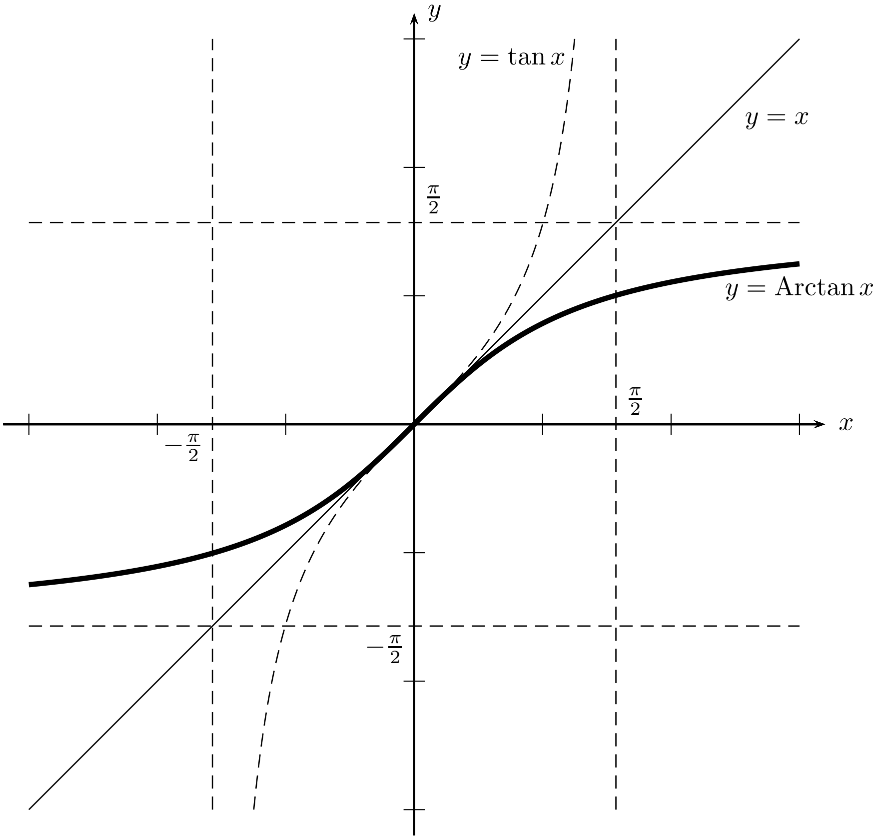
⇨ Montrer que pour tout $x\geqslant 0$, $\operatorname{Arctan} x\leqslant x$.

**Remarque**

⇨ Le calcul de primitive de la forme
$$\int\frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x$$
où $a,b,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $x^2+\alpha x+\beta$ n'a pas de racine réelle se fait de la manière suivante.
$$\begin{aligned}\int\frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x &= \frac{a}{2}\int\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x+\left(b-\frac{a\alpha}{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta}\\ &= \frac{a}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right)+\frac{2b-a\alpha}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta}\end{aligned}$$
Il suffit ensuite de mettre le trinôme (qui rappelons-le n'a pas de racine réelle) sous forme canonique
$$x^2+\alpha x+\beta=\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\underbrace{\frac{4\beta-\alpha^2}{4}}_{:=\gamma^2>0}=\gamma^2\left[\left(\frac{2x+\alpha}{2\gamma}\right)^2+1\right]$$
puis de poser $u:=(2x+\alpha)/(2\gamma)$.
$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+\beta} &= \frac{1}{\gamma^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{2x+\alpha}{2\gamma}\right)^2}\\ &= \frac{1}{\gamma}\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{\gamma}\operatorname{Arctan} u\\ &= \frac{1}{\gamma}\operatorname{Arctan}\frac{2x+\alpha}{2\gamma}.\end{aligned}$$
En conclusion
$$\int\frac{bx+c}{x^2+\alpha x+\beta}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}\ln\left(x^2+\alpha x+\beta\right)+\frac{2b-a\alpha}{2\gamma}\operatorname{Arctan}\frac{2x+\alpha}{2\gamma}.$$

**Exercice 15**

⇨ Montrer qu'il existe $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\quad \frac{1}{x^3-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$
Utiliser ce résultat pour calculer
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}.$$




### 2.5 Formules de trigonométrie réciproque

**Proposition 2.19**

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1], \qquad & \text{Arcsin}\, x + \text{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}, \\ \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad & \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Exercice 16**

⇨ Montrer que

$$\forall x \geqslant 0, \quad \frac{x}{1+x^2} \leqslant \text{Arctan}\, x \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}.$$

## 3 Fonctions trigonométriques hyperboliques

**Définition 3.1**

On définit les fonctions sh et ch sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}\, x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}\, x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

**Exercice 17**

⇨ Résoudre l'équation $7\,\text{ch}\, x + 2\,\text{sh}\, x = 9$.

**Proposition 3.2**

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \text{ch}\, x + \text{sh}\, x = e^x, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \text{ch}^2\, x - \text{sh}^2\, x = 1. \end{aligned}$$

**Proposition 3.3**

ch est sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x.$$

**Proposition 3.4**

— ch est paire et sh est impaire.
— On a

$$\operatorname{ch} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty,$$
$$\operatorname{sh} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty.$$

**Exercice 18**

⇨ Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a,b) \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})^2$ de fonctions, respectivement paire et impaire, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a(x) + b(x).$$

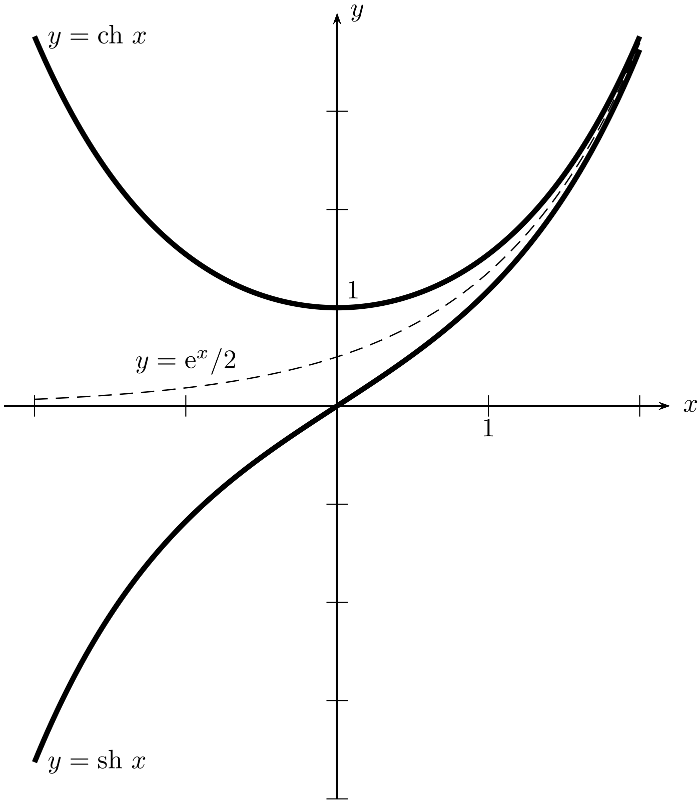
On dit que $a$ est la *partie paire* de $f$ et que $b$ est sa *partie impaire*. En particulier, ch est la partie paire de l'exponentielle et sh est sa partie impaire.

**Proposition 3.5**

— ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1$.
— sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\operatorname{sh} x = 0 \iff x = 0] \quad \text{et} \quad [\operatorname{sh} x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0]$.

**Proposition 3.6**

— sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
— ch réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.




**Remarque**

⇨ Le graphe de la fonction ch est obtenu en laissant pendre une chaine entre deux points. C'est pourquoi, le graphe de cette fonction est aussi appelé « chainette ».

**Exercice 19**

⇨ On appelle Argsh la bijection réciproque de sh. Donner une expression de $\operatorname{Argsh} x$ à l'aide des fonctions usuelles.

**Définition 3.7**

On définit la fonction th sur $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rrcl} \operatorname{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \end{array}$$

**Proposition 3.8**

th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

En particulier th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

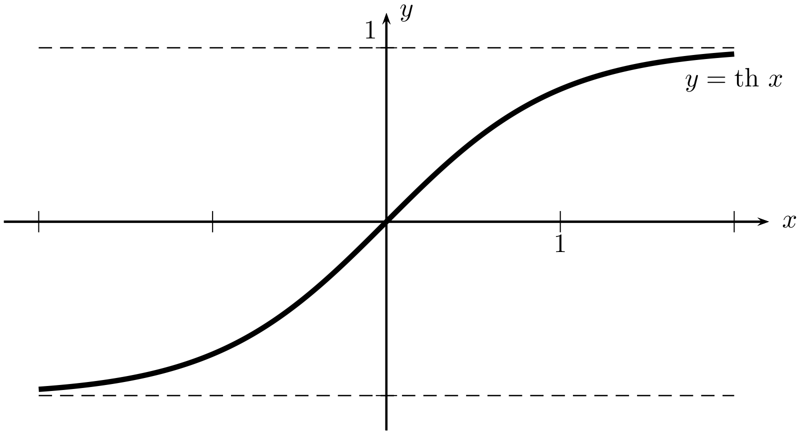
**Proposition 3.9**

— th est impaire.
— On a

$$\operatorname{th} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{th} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1.$$

**Proposition 3.10**

th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$.




**Remarque**

⇨ Les substitutions

$$\begin{array}{rcl} \cos x & \to & \operatorname{ch} x \\ \sin x & \to & \mathrm{i} \operatorname{sh} x \end{array}$$

et donc $\tan x \to \mathrm{i} \operatorname{th} x$ transforment toute formule de trigonométrie circulaire en une formule de trigonométrie hyperbolique.

**Exercice 20**

⇨ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx).$$

On pourra multiplier $S_n$ par $\operatorname{sh}(x/2)$ et utiliser des formules de trigonométrie hyperbolique.