Famille sommable

« Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever. »

— Niels Abel (1802–1829)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k = -\frac{1}{12}$$

— Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Famille sommable

Les séries nous ont permis de donner un sens, lorsque c'est possible, à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Cependant, de nombreux problèmes arrivent lorsque l'on souhaite sommer des familles $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ indexées par deux entiers. Il serait naturel de définir une telle somme, lorsque les séries en jeu sont convergentes, par

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}.$$

Mais on trouve rapidement des exemples pour lesquels

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$$

ont toutes deux un sens et des valeurs différentes. Par exemple, si on définit la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ par

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, \quad u_{i,j} \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{si } i=j, \\ -1 & \text{si } i=j+1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

les séries doubles définies plus haut ont toutes deux un sens, mais la première est égale à 1 tandis que la seconde vaut 0.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des sommes finies, il arrive donc que la « somme » des éléments d'une famille infinie dépende de l'ordre de sommation. L'objet de la théorie des *familles sommables* est d'avoir un cadre dans lequel la somme de ces familles ne dépend pas de cet ordre.

1.1 Famille sommable de réels positifs

Définition 1.1

On pose $\overline{[0, +\infty]} := [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

— On étend la définition de $+$ sur $[0, +\infty]$ en posant

$$\forall x \in [0, +\infty], \qquad \begin{aligned} x + (+\infty) &:= +\infty \\ (+\infty) + x &:= +\infty \end{aligned}$$

On vérifie que $+$ est associative et commutative sur $[0, +\infty]$ et que 0 est élément neutre.

— On étend la définition de $\times$ en posant

$$\forall x \in]0, +\infty], \qquad \begin{aligned} x \times (+\infty) &:= +\infty \\ (+\infty) \times x &:= +\infty \end{aligned}$$

On pose enfin $0 \times (+\infty) := 0$ et $(+\infty) \times 0 := 0$. On vérifie que $\times$ est associative et commutative sur $[0, +\infty]$ et que 1 est élément neutre. Enfin, $\times$ est distributive par rapport à $+$ sur $[0, +\infty]$.

— On étend la définition de $\leqslant$ sur $[0, +\infty]$ en posant

$$\forall x \in [0, +\infty], \quad x \leqslant +\infty.$$

Muni de $\leqslant$, $[0, +\infty]$ est un ensemble totalement ordonné.

Remarques

⇨ Excepté $+\infty$, tous les éléments de $[0, +\infty]$ sont réguliers pour $+$. Excepté 0 et $+\infty$, tous les éléments de $[0, +\infty]$ sont réguliers pour $\times$.

⇨ La relation d'ordre $\leqslant$ reste compatible avec l'addition et la multiplication : il est toujours possible d'ajouter et de multiplier entre elles des inégalités puisque ces dernières sont positives.

Définition 1.2

Soit A une partie de $[0, +\infty]$. On dit que A admet une *borne supérieure dans* $[0, +\infty]$ lorsque l'ensemble des majorants de A dans $[0, +\infty]$ admet un plus petit élément. Si tel est le cas, on le note $\overline{\sup} A$.

Proposition 1.3

Toute partie de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Remarques

⇨ Soit A une partie de $[0, +\infty]$. Si $+\infty \in A$, alors $\overline{\sup} A = +\infty$. Sinon, A est une partie de $[0, +\infty[$ et
- — Si A est vide, alors $\overline{\sup} A = 0$.
- — Si A n'est pas majorée, alors $\overline{\sup} A = +\infty$.
- — Sinon, A est non vide majorée. Elle admet donc une borne supérieure $\sup A$ dans $\mathbb{R}$ et $\overline{\sup} A = \sup A$.

⇨ Soit A une partie de $[0, +\infty]$.
- — Si B est une partie de A, alors $\overline{\sup} B \leqslant \overline{\sup} A$.
- — Si $x \in [0, +\infty]$, on définit $x + A$ par
$$x + A := \{x + a : a \in A\}.$$
Alors, si A est non vide, $\overline{\sup}\,(x + A) = x + \overline{\sup} A$.
- — Si $\lambda \in [0, +\infty]$, on définit λA par
$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$
Alors, $\overline{\sup}\,(\lambda A) = \lambda \overline{\sup} A$.

Définition 1.4

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On appelle *somme des* u_i pour $i \in I$ et on note $\sum_{i \in I} u_i$ la borne supérieure de

$$A := \left\{ \sum_{i \in K} u_i : K \text{ est une partie finie de } I \right\}$$

dans $[0, +\infty]$.

Remarque

⇨ Si I est fini, la somme que l'on vient de définir n'est autre que la somme $\sum_{i \in I} u_i$ définie de manière classique.

Exercice 1

⇨ Montrer que

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{(i+j)^2} = +\infty.$$

Définition 1.5

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ est *sommable* lorsque

$$\sum_{i\in I} u_i < +\infty.$$

Remarque

⇨ Si l'un des x_i est égal à $+\infty$, alors

$$\sum_{i\in I} u_i = +\infty.$$

En particulier, tous les éléments d'une famille sommable sont réels.

Proposition 1.6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive. Alors, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, si tel est le cas

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Remarque

⇨ Si la série à termes positifs $\sum u_n$ diverge, alors

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = +\infty.$$

C'est pourquoi, certains auteurs se permettent d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 1.7

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et J une partie de I. Alors

$$\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i.$$

Remarque

⇨ En particulier, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

Proposition 1.8

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\lambda,\mu\in[0,+\infty]$. Alors

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Proposition 1.9

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $[0,+\infty]$ telles que

$$\forall i\in I, \quad u_i \leqslant v_i.$$

Alors

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

Remarque

⇨ En particulier, si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 1.10

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $\sigma : J \to I$ une bijection. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_{\sigma(j)}.$$

Proposition 1.11: Théorème de sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Si $(I_j)_{j\in J}$ est une partition de I, alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Remarque

⇨ En particulier, si $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ et $I_1, I_2 \in \mathcal{P}(I)$ sont tels que $I = I_1 \sqcup I_2$, alors

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i.$$

Exercice 2

⇨ Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la famille

$$\left(\frac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$

est-elle sommable ?

Proposition 1.12: Théorème de Fubini

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Alors

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}.$$

Proposition 1.13

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles d'éléments de $[0,+\infty]$. Alors

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

Exercices 3

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la famille

$$\left(\mathrm{e}^{-(ap+bq)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

est sommable et calculer sa somme.

⇨ On considère la fonction ζ de Riemann définie par

$$\zeta(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x}.$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel la somme ci-dessus est finie.

1. Montrer que le domaine de définition de ζ est $]1,+\infty[$.
2. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 2}(\zeta(n)-1) = 1.$$

1.2 Famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$

Définition 1.14

On dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est *sommable* lorsque la famille des réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Remarques

- L'ensemble des familles sommables indexées par I est noté $\ell^1(I,\mathbb{K})$ ou $\ell^1(I)$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
- Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable et J est une partie de I, alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

Exercices 4

- Montrer que la famille
$$\left(\frac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$$
est sommable.
- Montrer que la famille
$$\left(z^{ij}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$$
est sommable si et seulement si $|z|<1$.

Définition 1.15

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on définit respectivement la *partie positive* x^+ et la *partie négative* x^- de x par

$$x^+ := \begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad x^- := \begin{cases} |x| & \text{si } x\leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x>0. \end{cases}$$

Proposition 1.16

Pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-, \qquad 0\leqslant x^+\leqslant |x| \qquad \text{et} \qquad 0\leqslant x^-\leqslant |x|\,.$$

Définition 1.17

- Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels sommable. Alors, les familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables et on définit
$$\sum_{i\in I} u_i := \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-\,.$$
- Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable. En décomposant $u_i = a_i + \mathrm{i}b_i$ en sa partie réelle et sa partie imaginaire, les familles $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont sommables et on définit
$$\sum_{i\in I} u_i := \sum_{i\in I} a_i + \mathrm{i}\sum_{i\in I} b_i.$$

Proposition 1.18

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente. De plus, si tel est le cas

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition 1.19

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$ et $l\in\mathbb{K}$. Alors

$$\sum_{i\in I} u_i = l$$

si et seulement si, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe une partie finie K de I telle que pour toute partie finie L de I

telle que $K \subset L$, on a

$$\left|\sum_{i\in L} u_i - l\right| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque

⇨ La définition « historique » d'une famille sommable est la suivante : on dit qu'une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est sommable lorsqu'il existe $l \in \mathbb{K}$ tel que quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie K de I telle que pour toute partie finie L de I telle que $K \subset L$, on a

$$\left|\sum_{i\in L} u_i - l\right| \leqslant \varepsilon.$$

Si c'est le cas, l est unique, et est appelé somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$. La proposition précédente nous montre donc que si une famille est sommable pour le sens donné dans ce cours, alors elle est sommable pour le sens « historique ». Réciproquement, on peut montrer que si une famille est sommable pour le sens « historique », elle est sommable pour le sens donné dans ce cours. Cela montre l'équivalence des deux approches.

Proposition 1.20

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i.$$

Remarque

⇨ Attention, il est possible que $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ soit sommable sans que $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ le soient. Dans ce cas, il est bien sur interdit d'écrire

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \mu \sum_{i\in I} v_i$$

puisque l'expression à droite de l'égalité n'a aucun sens.

Proposition 1.21

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles réelles sommables telles que

$$\forall i \in I, \quad u_i \leqslant v_i.$$

Alors

$$\sum_{i\in I} u_i \leqslant \sum_{i\in I} v_i.$$

Proposition 1.22

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|.$$

Proposition 1.23

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$ et $\sigma : J \to I$ une bijection. Alors $(u_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J} u_{\sigma(j)}.$$

Remarques

⇨ Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors, quel que soit la bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$

⇨ Cette propriété est fausse pour les séries semi-convergentes. En effet, le théorème de réarrangement de Riemann montre que si $\sum u_n$ est une série réelle semi-convergente, alors quel que soit $l \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = l.$$

Proposition 1.24: Théorème de sommation par paquets

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Si $(I_j)_{j\in J}$ est une partition de I, alors pour tout $j \in J$ la famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable. De plus, la famille $(\sum_{i\in I_j} u_i)_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Proposition 1.25: Théorème de Fubini

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, pour tout $j \in J$ la famille $(u_{i,j})_{i\in I}$ est sommable et pour tout $i \in I$, la famille $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable. De plus, les familles $(\sum_{i\in I} u_{i,j})_{j\in J}$ et $(\sum_{j\in J} u_{i,j})_{i\in I}$ sont sommables et

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j}.$$

Remarque

⇨ Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} &= \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} u_{i,j} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} u_{i,j}\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}.\end{aligned}$$

Exercice 5

⇨ Montrer que la famille

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}\right)_{k\in\mathbb{N}^*,n>k}$$

est sommable et calculer sa somme.

Proposition 1.26

Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors la famille $(u_i v_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_i v_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

Définition 1.27

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On appelle *produit de Cauchy* de ces suites la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Proposition 1.28

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors, leur produit de Cauchy est absolument convergent et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Exercice 6

⇨ L'objet de cet exercice est de donner une définition « moderne » de l'exponentielle.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer que la série
$$\sum \frac{z^n}{n!}$$
est absolument convergente ; on note $\exp(z)$ sa somme.
2. Montrer que
$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \quad \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b).$$