Espaces euclidiens

Table des matières

1 Produit scalaire

1.1 Produit scalaire

Définition 1.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit qu'une application

$$\begin{array}{rccc} \langle .|. \rangle : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \langle x|y \rangle \end{array}$$

est un *produit scalaire* lorsqu'elle est

— *bilinéaire*

$$\forall x,y,z \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \begin{aligned} \langle x|\lambda y + \mu z\rangle &= \lambda \langle x|y\rangle + \mu \langle x|z\rangle \\ \langle \lambda x + \mu y|z\rangle &= \lambda \langle x|z\rangle + \mu \langle y|z\rangle \end{aligned}$$

— *symétrique*

$$\forall x,y \in E, \quad \langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle$$

— *positive*

$$\forall x \in E, \quad \langle x|x\rangle \geqslant 0$$

— *définie*

$$\forall x \in E, \quad \langle x|x\rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

On appelle espace *préhilbertien réel* tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Remarques

⇨ Le produit scalaire $\langle x|y\rangle$ est parfois noté $\langle x,y\rangle$, $(x|y)$, (x,y) ou $x \cdot y$.

⇨ Le caractère symétrique du produit scalaire fait qu'il suffit de montrer la linéarité par rapport à l'une des variables pour en déduire la bilinéarité.

⇨ Quel que soit $x \in E$, $\langle x|0\rangle = 0$ et $\langle 0|x\rangle = 0$.

Exercices 1

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $\langle .|. \rangle$ définie par

$$\forall (x_1,\dots,x_n), (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle (x_1,\dots,x_n)|(y_1,\dots,y_n)\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

⇨ On pose $E := \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'application $\langle .|. \rangle$ définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P|Q \rangle := \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

⇨ On pose $E := \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$. Montrer que l'application $\langle .|. \rangle$ définie par

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R}), \quad \langle A|B \rangle := \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$.

1.2 Norme

Définition 1.2

Soit $x \in E$. On définit la *norme* de x, notée $\|x\|$, par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}.$$

On dit que x est *normé* lorsque $\|x\| = 1$.

Remarque

⇨ Le plus souvent, il sera préférable de travailler avec $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle$ qu'avec $\|x\|$.

Proposition 1.3

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad & \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \\ \forall x \in E, \quad & \|x\| = 0 \iff x = 0. \end{aligned}$$

Remarque

⇨ Si $x \in E$ est un vecteur non nul, il y a exactement deux vecteurs normés colinéaires à x

$$\frac{x}{\|x\|} \qquad \text{et} \qquad -\frac{x}{\|x\|}.$$

Proposition 1.4: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $x, y \in E$. Alors

$$|\langle x|y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires. Plus précisément

— $\langle x|y \rangle = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.

— $\langle x|y \rangle = -\|x\|\,\|y\|$ si et seulement si il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = -\lambda x$ ou $x = -\lambda y$.

Remarques

⇨ En particulier, avec le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

⇨ L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'adapte au cas où $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique positive quelconque, même lorsque cette dernière n'est pas définie. Si $x, y \in E$, on a alors

$$|\varphi(x, y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x, x)}\sqrt{\varphi(y, y)}.$$

Cependant, la condition d'égalité n'est plus valide.

Exercice 2

⇨ Montrer que

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1 \Longrightarrow |x + y + z| \leqslant \sqrt{\frac{11}{6}}$$

Si on suppose que $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1$, à quelle condition a-t-on $|x + y + z| = \sqrt{11/6}$?

Proposition 1.5: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit f, g deux fonctions réelles continues sur l'intervalle I et $a, b \in I$. Si $a \leqslant b$, alors

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$[\forall x \in [a,b], \quad f(x) = \lambda g(x)] \quad \text{ou} \quad [\forall x \in [a,b], \quad g(x) = \lambda f(x)].$$

Remarque

⇨ Cette inégalité reste vraie si f et g sont des fonctions continues par morceaux. Cependant, dans ce cas, la condition d'égalité n'est plus valide.

Exercices 3

⇨ Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs strictement positives. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right) \geqslant (b-a)^2.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que cette inégalité soit une égalité.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leqslant b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

Proposition 1.6: Inégalité triangulaire

Soit $x, y \in E$.

— Alors

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont positivement liés, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.

— De plus

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x-y\| \quad \text{et} \quad \|x+y\| \geqslant \|x\| - \|y\|.$$

Proposition 1.7

L'identité suivante est appelée identité du parallélogramme

$$\forall x, y \in E, \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Remarques

⇨ Dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés.

⇨ Les identités suivantes sont appelées identités de polarisation.

$$\begin{aligned}\forall x, y \in E, \quad \langle x|y\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - \|x-y\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).\end{aligned}$$

Exercices 4

⇨ Soit $x, y \in E$ deux vecteurs distincts de normes inférieures ou égales à 1. Montrer que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

⇨ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\langle u(x)|x\rangle = 0$. Montrer que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x)|y\rangle = -\langle x|u(y)\rangle.$$

1.3 Notion d'orthogonalité

Définition 1.8

- Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont *orthogonaux* lorsque $\langle x|y\rangle = 0$.
- Soit A et B deux parties de E. On dit que A et B sont *orthogonales* lorsque

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad \langle a|b\rangle = 0.$$

Remarque

⇨ Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Définition 1.9

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que cette famille est *orthogonale* lorsque

$$\forall i, j \in I, \quad i \neq j \quad \Longrightarrow \quad \langle x_i|x_j\rangle = 0.$$

- On dit que cette famille est *orthonormée* lorsque

$$\forall i, j \in I, \quad \langle x_i|x_j\rangle = \delta_{i,j} \coloneqq \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Remarque

⇨ Sur $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, la base canonique est orthonormée.

Proposition 1.10

Toute famille orthogonale ne contenant aucun vecteur nul est libre.

Remarque

⇨ En particulier, toute famille orthonormée est libre.

Exercice 5

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues, 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. On définit sur E le produit scalaire

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f|g\rangle \coloneqq \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction s_k par $s_k(x) \coloneqq \sin(kx)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction c_k par $c_k(x) \coloneqq \cos(kx)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(c_0, s_1, c_1, \ldots, s_n, c_n)$ est orthogonale.

Proposition 1.11: Pythagore

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale. Alors

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2.$$

Remarque

⇨ Si x et y sont deux vecteurs de E, alors $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si et seulement si x et y sont orthogonaux. C'est le théorème de Pythagore.

Définition 1.12

Soit A une partie de E. On appelle *orthogonal de A* et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de A

$$A^\perp \coloneqq \{x \in E \mid \forall a \in A, \quad \langle a|x\rangle = 0\}.$$

En particulier A et $A^\perp$ sont orthogonaux.

Remarques

⇨ $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

⇨ Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Proposition 1.13

Soit A une partie de E.
- $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $A^\perp = (\operatorname{Vect} A)^\perp$.

Remarque

⇨ Si F est un sous-espace vectoriel de E, F et $F^\perp$ sont en somme directe.

Exercice 6

⇨ Soit $E \coloneqq \mathcal{C}^0\left([-1,1], \mathbb{R}\right)$ muni du produit scalaire

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f|g\rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On pose $F \coloneqq \{f \in E \mid \forall x \in [0,1], \quad f(x) = 0\}$. Calculer $F^\perp$, puis $F \oplus F^\perp$.

2 Espace euclidien

Définition 2.1

On appelle *espace euclidien* tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Remarque

⇨ Dans la suite de ce chapitre, excepté dans la section sur la minimisation de la distance à un sous-espace vectoriel, E désignera un espace euclidien.

2.1 Supplémentaire orthogonal

Proposition 2.2

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors
$$E = F \oplus F^\perp.$$
De plus, $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F ; on l'appelle le *supplémentaire orthogonal* de F.

Remarque

⇨ Lorsque E n'est pas de dimension finie, la somme $F + F^\perp$ reste directe, mais elle n'est pas toujours égale à E.

Exercice 7

⇨ On considère $E \coloneqq \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle .|.\rangle$ défini par

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \langle A|B\rangle \coloneqq \operatorname{tr}\left(A^\top B\right).$$

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 2.3

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$\dim E = \dim F + \dim F^\perp.$$

Proposition 2.4

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors
$$\left(F^\perp\right)^\perp = F.$$

2.2 Base orthonormée

Proposition 2.5

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $(f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormée de F et $(g_1, \dots, g_q)$ est une base orthonormée de $F^\perp$, alors $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base orthonormée de E.

Proposition 2.6

Tout espace euclidien admet une base orthonormée.

Proposition 2.7: Théorème de la base incomplète

On peut compléter toute famille orthonormée de E en une base orthonormée de E.

Proposition 2.8

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Alors, pour tout $x \in E$

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k | x \rangle \, e_k.$$

Remarques

⇨ Le calcul des coordonnées de $x \in E$ dans une base orthonormée se fait donc en effectuant des produits scalaires.

⇨ En termes de base duale, la proposition précédente s'énonce

$$\forall x \in E, \quad \forall k \in [\![1, n]\!], \quad e_k^\star(x) = \langle e_k | x \rangle.$$

Proposition 2.9

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

— Soit $x, y \in E$ dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$. Alors

$$\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Autrement dit, si $X \coloneqq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y \coloneqq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(y)$

$$\langle x | y \rangle = X^\top Y.$$

En particulier

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = X^\top X.$$

— Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E et $M \coloneqq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$M^\top M = \left(\langle x_i | x_j \rangle \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Proposition 2.10

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E de dimension n et $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On pose $M \coloneqq \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$. Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base orthonormée de E si et seulement si

$$M^\top M = I_n.$$

2.3 Projecteur orthogonal

Dans cette section, et dans cette section seulement, E désigne un espace préhilbertien.

Définition 2.11

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

De plus, $F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F ; on l'appelle le *supplémentaire orthogonal* de F.

Définition 2.12

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle *projecteur orthogonal* sur F, le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

Proposition 2.13

Soit p un projecteur orthogonal. Alors

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Proposition 2.14

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, $(e_1, \ldots, e_r)$ une base orthonormée de F et p le projecteur orthogonal sur F. Alors

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle e_k | x \rangle \, e_k.$$

Remarques

⇨ Si la base $(e_1, \ldots, e_r)$ de F est orthogonale, alors

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle e_k | x \rangle}{\|e_k\|^2} e_k.$$

De plus, si q est le projecteur sur $F^{\perp}$ parallèlement à F, alors $p + q = \mathrm{Id}$ donc

$$\forall x \in E, \quad q(x) = x - \sum_{k=1}^{r} \frac{\langle e_k | x \rangle}{\|e_k\|^2} e_k.$$

⇨ En particulier, si E est un espace euclidien, u est un vecteur non nul de E et p est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$, alors

$$\forall x \in E, \quad p(x) = x - \frac{\langle u | x \rangle}{\|u\|^2} u.$$

Exercice 8

⇨ Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F d'équation

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0. \end{cases}$$

Définition 2.15

Soit A une partie non vide de E et $x \in E$. On définit *la distance de x à A*, que l'on note $\mathrm{d}(x, A)$, par

$$\mathrm{d}(x, A) := \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Proposition 2.16

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Alors, la borne inférieure

$$\mathrm{d}(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\|$$

est un minimum qui est atteint en un unique point. Ce point est le projeté orthogonal de x sur F.

Exercice 9

⇨ Montrer que la borne inférieure

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} \left[\mathrm{e}^x - (ax+b)\right]^2 \, \mathrm{d}x$$

est atteinte en un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on calculera.

2.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Dans la suite de ce chapitre, E désigne de nouveau un espace euclidien.

Proposition 2.17: Algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(f_1, \ldots, f_k)$ est une base orthogonale de $E_k \coloneqq \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

Remarques

⇨ Une telle base est donnée par l'algorithme d'*orthogonalisation de Gram-Schmidt.*
- On pose $f_1 \coloneqq e_1$. La famille (f_1) est alors une base orthogonale de E_1.
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'on a construit une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_k)$ de E_k. On définit p_{k+1} comme le projeté orthogonal de e_{k+1} sur E_k. Puisque $(f_1, \ldots, f_k)$ est une base orthogonale de E_k, on a

$$p_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_i | e_{k+1} \rangle}{\|f_i\|^2} f_i.$$

On note $f_{k+1} \coloneqq e_{k+1} - p_{k+1}$ le projeté orthogonal de e_{k+1} sur $E_k^\perp$. On a alors

$$f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle f_i | e_{k+1} \rangle}{\|f_i\|^2} f_i.$$

On a ainsi construit une base orthogonale $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ de E_{k+1}.

La base orthogonale $(f_1, \ldots, f_n)$ ainsi construite est solution de notre problème.

⇨ Dans la proposition précédente, il n'y a pas unicité d'une telle base $(f_1, \ldots, f_n)$. Cependant, une famille $(g_1, \ldots, g_n)$ est une autre solution de notre problème si et seulement si il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^*$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad g_k = \lambda_k f_k.$$

⇨ L'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt peut s'utiliser pour une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ quelconque d'un espace euclidien de dimension n.
- Si l'un des vecteurs f_k est nul, alors $e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1})$ et l'algorithme s'arrête.
- Sinon, l'algorithme construit une base orthogonale de E tout en prouvant la liberté de $(e_1, \ldots, e_n)$.

Exercice 10

⇨ On pose $E \coloneqq \mathbb{R}_n[X]$, que l'on munit du produit scalaire

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], \quad \langle P | Q \rangle \coloneqq \int_{-1}^{1} P(x)Q(x) \, \mathrm{d}x.$$

Montrer qu'il existe une unique base orthogonale de E, formée de polynômes $P_0, \ldots, P_n$ de coefficients dominants égaux à 1, tels que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg P_k = k.$$

Calculer cette base pour $n = 3$.

Proposition 2.18: Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{B} \coloneqq (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors il existe une base orthonormée $(g_1, \ldots, g_n)$ de E telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $(g_1, \ldots, g_k)$ est une base orthonormée de $E_k \coloneqq \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

Remarques

⇨ Si l'on souhaite obtenir une telle base, il suffit de normer les vecteurs de la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ obtenue par l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en posant

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad g_k = \frac{1}{\|f_k\|} f_k.$$

On dit qu'on a obtenu la base $(g_1, \ldots, g_n)$ par l'algorithme d'*orthonormalisation de Gram-Schmidt.*

⇨ Dans la proposition précédente, il n'y a pas unicité d'une telle base $(g_1, \dots, g_n)$. Cependant, une famille $(h_1, \dots, h_n)$ est une autre solution de notre problème si et seulement si il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad h_k = \varepsilon_k g_k.$$

⇨ Pour avoir l'unicité, il suffit de rajouter la condition

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \langle e_k | g_k \rangle > 0.$$

L'unique famille solution de ce problème est la famille obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 11

⇨ Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, orthonormaliser la famille

$$e_1 \coloneqq (1, -2, 2), \qquad e_2 \coloneqq (-1, 0, -1), \qquad e_3 \coloneqq (5, -3, 7).$$

2.5 Dual

Proposition 2.19

Pour toute forme linéaire φ sur E, il existe un unique $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a | x \rangle.$$