Espérance, variance

« Je ne crois aux statistiques que lorsque je les ai moi-même falsifiées. »

— Winston Churchill (1874–1965)

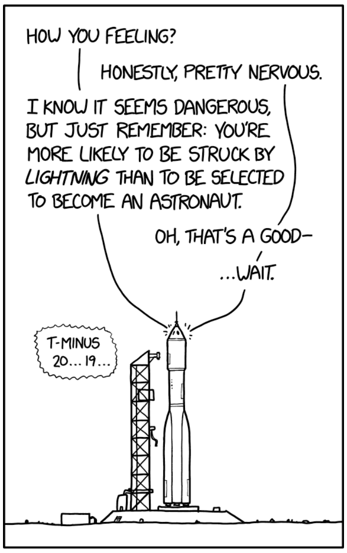

Table des matières

1 Espérance, variance

1.1 Espérance

Définition 1.1

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. On appelle *espérance* de X le réel

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x).$$

Remarques

- Dans cette formule, on peut remplacer $X(\Omega)$ par une partie finie E' de E telle que $X(\Omega) \subset E'$.
- L'espérance de X ne dépend que de la loi suivie par X.
- Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est un évènement, alors $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Exercice 1

- On lance n fois une pièce équilibrée. On s'intéresse à la première apparition de pile. On note X la variable aléatoire égale à k si le premier pile a lieu au k-ième lancer et on convient que $X = 0$ si aucun lancer n'amène pile. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Proposition 1.2

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Proposition 1.3

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Alors, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Exercices 2

⇨ On lance deux dés à 6 faces. Calculer l'espérance de leur somme.

⇨ Le chat Speed se fait chaque jour les griffes, soit sur le canapé soit sur les rideaux. Il ne se fait jamais les griffes deux jours de suite sur le canapé. S'il se fait les griffes sur les rideaux un jour donné, alors il choisira le lendemain le canapé avec une probabilité $1/3$. Vous devez vous occuper de Speed pendant $m+1$ jours. Le premier jour, jour d'indice 0, il attaque les rideaux. Pour tout $n \in [\![0, m]\!]$, on définit la variable aléatoire X_n égale au nombre de jours où le chat a fait ses griffes sur les rideaux parmi les jours d'indices 0 à n. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

⇨ Soit $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer la formule dite du crible

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

En déduire que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble fini E

$$\mathrm{Card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Proposition 1.4

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles.
- Si $X \geqslant 0$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
- Si $X \leqslant Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.
- On a $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Proposition 1.5

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
- Si X est une variable aléatoire constante égale à a, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
- S'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tel que $X \sim \mathcal{U}([\![a, b]\!])$, alors $\mathbb{E}(X) = (a+b)/2$.
- S'il existe $p \in [0, 1]$ tel que $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$.
- S'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ tels que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$.

Exercices 3

⇨ On dispose de n fléchettes. À chaque lancer, on a une probabilité de $1/10$ de tirer dans le mille. On suppose les lancers indépendants et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes placées dans le mille.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer la probabilité de mettre au plus 1 fléchette dans le mille.
3. Calculer l'espérance de X.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_n := [\![1, n]\!]$ et on munit $\Omega_n := \mathcal{F}(I_n, I_n)$ de la probabilité uniforme. On note X_n la variable aléatoire sur Ω_n égale au cardinal de l'image d'un élément de Ω_n. Déterminer l'espérance de X_n puis en donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$.

Définition 1.6

On dit qu'une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est centrée lorsque

$$\mathbb{E}(X) = 0.$$

Remarque

⇨ Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire, alors $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

Proposition 1.7: Formule de transfert

Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x).$$

Remarque

⇨ Dans cette formule, on peut remplacer $X(\Omega)$ par une partie finie E' de E telle que $X(\Omega) \subset E'$.

Exercice 4

⇨ Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![-2, 2]\!]$. Déterminer l'espérance de X^2 en utilisant la définition de l'espérance, puis la formule de transfert.

Proposition 1.8

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. Alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Plus généralement, soit $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$

Exercices 5

⇨ Dans le quadrillage $[\![0, n]\!] \times [\![0, p]\!]$, on place uniformément et de manière indépendante un point A sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées. Quelle est, en moyenne, l'aire du triangle OAB ?

⇨ On effectue $p \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. On note $X_1, \dots, X_p$ les résultats des tirages successifs et on pose $Y := \max(X_1, \dots, X_p)$.

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, calculer $\mathbb{P}(Y \leqslant k)$. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.
2. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsqu'à p fixé, n tend vers $+\infty$.
3. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(Y)$ lorsqu'à n fixé, p tend vers $+\infty$.

1.2 Variance

Définition 1.9

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle respectivement *variance* et *écart-type* de X les réels

$$\mathbb{V}(X) := \mathbb{E}\left([X - \mathbb{E}(X)]^2\right) \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) := \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Remarque

⇨ La variance et l'écart-type de X ne dépendent que de la loi suivie par X.

Proposition 1.10: Formule de König-Huygens

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Remarque

⇨ On calcule souvent la variance de X en utilisant la formule d'Huygens ou en passant par $\mathbb{E}(X(X-1))$ qui est parfois plus commode à calculer que $\mathbb{E}(X^2)$. On utilise alors la relation

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exercice 6

⇨ Soit X une variable aléatoire réelle. Quelle valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ minimise $\mathbb{E}((X - \lambda)^2)$? Que vaut ce minimum ?

Proposition 1.11

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X) \qquad \text{et} \qquad \sigma(aX + b) = |a|\, \sigma(X).$$

Proposition 1.12

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.
- Si X est une variable aléatoire constante égale à $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{V}(X) = 0$.
- Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \leqslant b$. Si $X \sim \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$, alors $\mathbb{V}(X) = (n^2 - 1)/12$ où $n := \mathrm{Card}(\llbracket a, b \rrbracket) = b - a + 1$.
- S'il existe $p \in [0, 1]$ tel que $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = pq$.
- S'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$ tels que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $\mathbb{V}(X) = npq$.

Remarque

⇨ Dans les formules donnant les variances d'une loi de Bernoulli et d'une loi binomiale, on a posé $q := 1 - p$.

Proposition 1.13

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si il existe un évènement A de probabilité 1 tel que

$$\forall \omega \in A, \quad X(\omega) = \mathbb{E}(X).$$

Remarque

⇨ Autrement dit, la variance d'une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est nulle si et seulement si X est constante sur un évènement de probabilité 1. Un tel évènement est dit « *presque sûr* ».

Définition 1.14

On dit qu'une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est réduite lorsque

$$\mathbb{V}(X) = 1.$$

Remarque

⇨ Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire réelle de variance non nulle, alors

$$\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est centrée réduite.

2 Couple de variables aléatoires

2.1 Loi conjointe

Définition 2.1

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires. On définit la variable aléatoire $Z := (X, Y)$ par

$$Z : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & E \times F \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)). \end{array}$$

Remarque

⇨ On a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Cependant, l'inclusion peut être stricte. Par exemple, Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et $Z := (X, X)$, alors $Z(\Omega) = \{(k, k) : k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ tandis que $X(\Omega) \times X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Définition 2.2

Soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires.
- On appelle *loi conjointe* du couple (X, Y) la loi de $Z := (X, Y)$.
- On appelle *première loi marginale* de (X, Y) la loi de X et *seconde loi marginale* de (X, Y) la loi de Y.

Remarques

➯ La loi conjointe de (X,Y) est caractérisée par sa distribution de probabilités $(\mathbb{P}(Z=z))_{z\in Z(\Omega)}$. Étant donné que $Z(\Omega) \subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$, cette distribution est donnée par

$$(\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}.$$

➯ Soit $X:\Omega\to E$ et $Y:\Omega\to F$ deux variables aléatoires. On note $X(\Omega) \coloneqq \{x_1,\dots,x_n\}$ et $Y(\Omega)\coloneqq\{y_1,\dots,y_m\}$. Alors

$$\begin{aligned}\forall i\in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}(X=x_i) &= \sum_{j=1}^{m}\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j))\\ \forall j\in [\![1,m]\!], \quad \mathbb{P}(Y=y_j) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}((X=x_i)\cap(Y=y_j))\end{aligned}$$

En particulier, les lois marginales se déduisent de la loi conjointe. Par contre, la connaissance des lois marginales ne permet pas d'en déduire la loi conjointe. Par exemple, si on considère l'expérience qui consiste à jouer deux fois de suite à pile ou face, modélisée par $\Omega \coloneqq \{P,F\}^2$ muni de la loi uniforme, et que $X_1, X_2 : \Omega \to \{P,F\}$ sont les variables aléatoires donnant les résultats respectifs des deux lancers, alors (X_1,X_2) et (X_1,X_1) ont les mêmes lois marginales, mais n'ont pas la même loi conjointe.

Exercice 7

➯ On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer successivement et sans remise deux boules dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire qui vaut R si la première (respectivement deuxième) boule tirée est rouge, et N sinon.

1. Déterminer la loi du couple $Y \coloneqq (X_1,X_2)$, puis ses lois marginales.
2. Même question si le tirage se fait avec remise.

Définition 2.3

Soit $X:\Omega\to E$ une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini E et $B\in\mathcal{P}(\Omega)$ un évènement de probabilité non nulle. On appelle *loi de X conditionnée par l'évènement B* la probabilité

$$\begin{array}{rccc}\mathbb{P}_{X|B}: & \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0,1]\\ & A & \longmapsto & \mathbb{P}(X\in A|B).\end{array}$$

Remarques

➯ En pratique, lorsqu'il nous sera demandé de déterminer la loi d'une variable aléatoire $X:\Omega\to E$ conditionnée par l'évènement B, on commencera par déterminer un ensemble fini E' tel que $X(\Omega)\subset E'$ et on calculera $\mathbb{P}(X=x|B)$ pour tout $x\in E'$.

➯ Si $X:\Omega\to E$ et $Y:\Omega\to F$ sont deux variables aléatoires et $y\in F$ est tel que $\mathbb{P}(Y=y)>0$, il est courant de considérer la loi de X conditionnée par l'évènement $(Y=y)$.

2.2 Covariance

Définition 2.4

Soit $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. On appelle *covariance* de X et de Y et on note $\mathrm{Cov}(X,Y)$ le réel

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left([X-\mathbb{E}(X)]\,[Y-\mathbb{E}(Y)]\right).$$

Lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, on dit que X et Y sont *décorrélées* et on note $X\perp Y$.

Remarque

➯ Si $X:\Omega\to\mathbb{R}$ est une variable aléatoire, alors

$$\mathrm{Cov}(X,X)=\mathbb{V}(X).$$

Proposition 2.5

Soit $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Alors

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition 2.6

Soit $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles.

— Si $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(aX + bY, Z) &= a\mathrm{Cov}(X, Z) + b\mathrm{Cov}(Y, Z) \\ \mathrm{Cov}(X, aY + bZ) &= a\mathrm{Cov}(X, Y) + b\mathrm{Cov}(X, Z). \end{aligned}$$

— De plus

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X).$$

— Enfin

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X) \geqslant 0.$$

Autrement dit, la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

Remarques

⇨ Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\mathrm{Cov}(a, X) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Cov}(X, a) = 0.$$

⇨ La covariance est presque un produit scalaire. La seule propriété qui lui manque pour en être un est la propriété de séparation. En effet, si $X : \Omega \to \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Cov}(X, X) = 0$ si et seulement si X est constante sur un évènement de probabilité 1.

⇨ En particulier, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles, alors

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sigma(X)\sigma(Y).$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et un évènement A de probabilité 1 tel que

$$[\forall \omega \in A, \quad Y(\omega) = \alpha X(\omega) + \beta] \qquad \text{ou} \qquad [\forall \omega \in A, \quad X(\omega) = \alpha Y(\omega) + \beta].$$

⇨ Si $\sigma(X) > 0$ et $\sigma(Y) > 0$, le réel

$$\mathrm{Cor}(X, Y) \coloneqq \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

appelé *coefficient de corrélation*, est dans $[-1, 1]$. De plus, $\mathrm{Cor}(X, Y) = 1$ si et seulement si il existe $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et un évènement A de probabilité 1 tel que

$$\forall \omega \in A, \quad Y(\omega) = \alpha X(\omega) + \beta.$$

De même $\mathrm{Cor}(X, Y) = -1$ si et seulement si il existe $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ et un évènement A de probabilité 1 tel que

$$\forall \omega \in A, \quad Y(\omega) = -\alpha X(\omega) + \beta.$$

Proposition 2.7

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Si X et Y sont indépendantes, alors elles sont décorrélées.

Remarque

⇨ La réciproque de la proposition précédente est fausse. Il est possible que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ sans que X et Y soient indépendantes. Prenons par exemple l'exemple d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[\![-1, 1]\!]$. Alors $\mathrm{Cov}(X, X^2) = 0$. Pourtant, X et X^2 ne sont pas indépendantes.

Proposition 2.8

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires. Alors

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires, alors

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Proposition 2.9

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires. Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Plus généralement, si $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes, alors

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

Remarque

⇨ Si $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ sont deux variables aléatoires réelles indépendantes

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}.$$

Exercice 8

⇨ Les *méthodes probabilistes* permettent de prouver certains résultats mathématiques dont l'énoncé ne fait pas apparaître des probabilités.

1. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Montrer qu'il existe $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \leqslant \mathbb{E}(X)$.
2. Soit $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs de norme 1. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ tels que

$$\|\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_n v_n\| \leqslant \sqrt{n}.$$

3 Vers les grands nombres

Proposition 3.1: Inégalité de Markov

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors, quel que soit $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

Remarque

⇨ Cette inégalité a le mérite de pouvoir être appliquée sans aucune hypothèse sur la loi de la variable aléatoire. Elle est très générale mais assez mauvaise ! Évidemment, cette inégalité n'a aucun intérêt si $a \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Exercice 9

⇨ Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire positive, majorée par M. Montrer que

$$\forall a \geqslant 0, \quad \mathbb{E}(X) \leqslant a + M\mathbb{P}(X \geqslant a).$$

Proposition 3.2: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Alors, quel que soit $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Remarque

⇨ On se donne $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi d'espérance α et de variance σ^2. On pose

$$M_n := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Alors

$$\mathbb{E}(M_n) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

En particulier, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, quel que soit $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(|M_n - \alpha| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Toute information de ce type est appelée *loi des grands nombres*. Les lois des grands nombres sont fondamentales car elles justifient l'approche fréquentiste que l'on a des probabilités.

Exercice 10

⇨ Un parti politique effectue un sondage pour évaluer son image dans l'opinion. La proportion de la population qui lui est favorable est $p \in [0,1]$. On interroge un échantillon de n personnes. La réponse de la k-ième personne sondée est représentée par la variable aléatoire X_k qui vaut 1 si la personne est favorable au parti et 0 sinon. Chaque variable X_k suit donc une loi de Bernoulli de paramètre p et on suppose que $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes. La variable aléatoire

$$M_n \coloneqq \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

est utilisée comme un estimateur de p.

1. Montrer que quel que soit $\varepsilon > 0$
$$\mathbb{P}(|M_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$
2. Soit $\alpha \in]0,1]$. Combien de personnes doit-on interroger pour obtenir une approximation de p à ε près avec une probabilité supérieure à $1-\alpha$? Faites une application numérique pour $\varepsilon = 0.02$ et $\alpha = 0.1$.