Espaces vectoriels

« Vector is a useless survival, or offshoot from quaternions, and has never been of the slightest use to any creature. »

— Lord Kelvin (1824–1907)

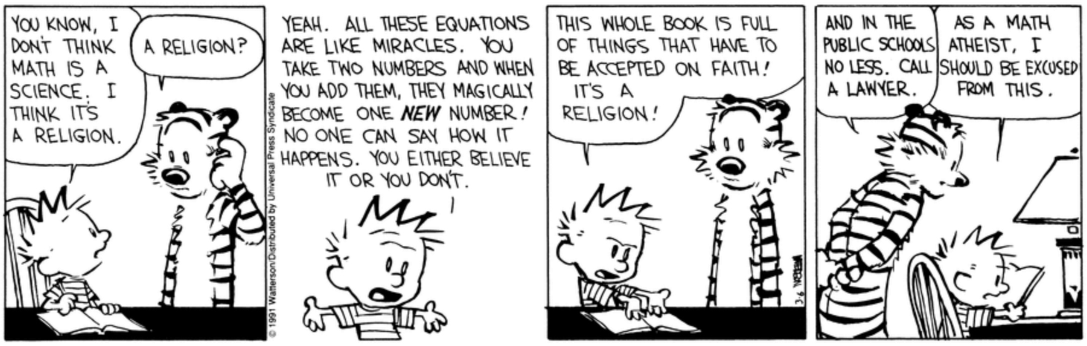

Table des matières

1 Espace vectoriel, application linéaire

1.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 1.1

Soit E un ensemble. On dit qu'une *loi* notée additivement

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array}$$

fait de $(E,+)$ un groupe commutatif lorsque :

— Elle est *associative*

$$\forall x,y,z \in E, \quad (x+y)+z = x+(y+z).$$

— Elle est *commutative*

$$\forall x,y \in E, \quad x+y = y+x.$$

— Elle admet un *élément neutre*

$$\exists e \in E, \quad \forall x \in E, \quad x+e = e+x = x.$$

Un tel élément est unique ; on le note 0_E.

— Tout élément $x \in E$ admet un *opposé*

$$\exists y \in E, \quad x + y = y + x = 0_E.$$

Un tel élément est unique ; on le note $-x$.

Remarques

⇨ Si $x_1, x_2, x_3 \in E$, l'associativité de la loi $+$ affirme que $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$; on note $x_1 + x_2 + x_3$ cette valeur commune. Plus généralement, si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, la valeur de $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ne dépend pas de l'ordre dans lesquelles sont effectuées les additions. Cela justifie l'usage de cette notation n'utilisant pas de parenthèses.

⇨ Si $(E, +)$ est un groupe commutatif et $x, y \in E$, l'élément $x + (-y)$ est aussi noté $x - y$. De plus

$$\forall x, y, z \in E, \quad x + y = z \quad \Longleftrightarrow \quad x = z - y.$$

⇨ Les éléments de E sont *réguliers*. Autrement dit

$$\forall x, y, z \in E, \quad x + y = x + z \quad \Longrightarrow \quad y = z.$$

En première lecture, on pourra considérer que dans la suite de ce cours, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Cependant, excepté quelques résultats sur les symétries qui ne sont pas valables dans un corps de caractéristique 2, ce cours reste valide si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, notion dont nous donnerons la définition plus tard dans l'année.

Définition 1.2

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $(E, +)$ un groupe commutatif d'élément neutre 0_E et $\cdot$ une loi de composition externe.

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel* lorsque

$$\begin{array}{rl} \forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \\ \forall x \in E, & 1 \cdot x = x. \end{array}$$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*, ceux de E, *vecteurs*.

Proposition 1.3

$$\begin{array}{rl} \forall x \in E, & 0 \cdot x = 0_E \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, & \lambda \cdot 0_E = 0_E \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, & (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x) \end{array}$$

Remarque

⇨ En particulier, si $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$.

Proposition 1.4

$$\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot x = 0_E \quad \Longrightarrow \quad [\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E].$$

Définition 1.5

Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $E \coloneqq \mathbb{K}^n$

— la loi de composition interne $+$ par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n,$$

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \coloneqq (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

— la loi de composition externe $\cdot$ par

$$\forall\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in\mathbb{K}^n,\quad\forall\lambda\in\mathbb{K},\quad\lambda\cdot\left(x_1,\ldots,x_n\right):=\left(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n\right).$$

Alors $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre $(0,\ldots,0)$.

Remarques

⇨ En particulier, $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

⇨ $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition 1.6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble. On définit sur $\mathcal{F}\left(X,E\right)$
— la loi de composition interne $+$ par

$$\forall f,g\in\mathcal{F}\left(X,E\right),\quad\forall x\in X,\quad\left(f+g\right)\left(x\right):=f(x)+g(x).$$

— la loi de composition externe $\cdot$ par

$$\forall f\in\mathcal{F}\left(X,E\right),\quad\forall\lambda\in\mathbb{K},\quad\left(\lambda\cdot f\right)\left(x\right):=\lambda\cdot f(x).$$

Alors $\left(\mathcal{F}\left(X,E\right),+,\cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est l'application de X dans E qui à tout $x\in X$ associe 0_E. En particulier, $\left(\mathcal{F}\left(X,\mathbb{K}\right),+,\cdot\right)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque

⇨ En particulier, si X est un ensemble, $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le « zéro » est la fonction nulle. Ainsi, $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont le « zéro » est la fonction nulle. De même, l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont le « zéro » est la suite nulle.

Définition 1.7

Soit $(E,+,\cdot)$ et $(F,+,\cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $E\times F$
— la loi de composition interne $+$ par

$$\forall\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\in E\times F,\quad\left(x_1,y_1\right)+\left(x_2,y_2\right):=\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right).$$

— la loi de composition externe $\cdot$ par

$$\forall\left(x,y\right)\in E\times F,\quad\forall\lambda\in\mathbb{K},\quad\lambda\cdot\left(x,y\right):=\left(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y\right).$$

Alors $(E\times F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre $(0_E,0_F)$.

Dans la suite du cours, l'élément 0_E sera désormais noté 0. Cependant, il sera toujours important de se demander si un 0 est le zéro de $\mathbb{K}$ ou celui de E. Dans le second cas, on se demandera quelle est la nature de ce zéro : est-ce un un scalaire, un n-uplet, une suite, une fonction ?

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition 1.8

On dit qu'une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un *sous-espace vectoriel* de E lorsque
— $0\in F$
— F est stable par *combinaisons linéaires*

$$\forall x,y\in F,\quad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad\lambda x+\mu y\in F.$$

Si tel est le cas, $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques

⇨ Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\begin{aligned}\forall x\in F,\quad\forall\lambda\in\mathbb{K},\qquad&\lambda x\in F,\\ \forall x,y\in F,\qquad&x+y\in F.\end{aligned}$$

- Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé sous-espace vectoriel *trivial*. De même, E est un sous-espace vectoriel de E.
- Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Alors
$$F \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Par exemple, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $x + 2y - z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 1

- Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + \mathrm{e}^{-t^2} y(t) = 0$$
est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 1.9

Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Remarques

- Contrairement à l'intersection, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas en général un sous-espace vectoriel.
- Soit $(a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant p}$ une famille de scalaires. Alors
$$F = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mid \forall i \in [\![1, q]\!], \quad a_{i,1} x_1 + \cdots + a_{i,p} x_p = 0\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. Par exemple, l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\begin{cases} x + y \quad + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.10

Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, au sens de l'inclusion, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. On l'appelle *sous-espace vectoriel engendré* par A et on le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Remarques

- Si F est un sous-espace vectoriel de E tel que $A \subset F$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset F$.
- Si $A \coloneqq \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $\mathrm{Vect}(A)$ est aussi noté $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

Proposition 1.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E$. Alors
$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$
Les éléments de $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ sont appelés *combinaisons linéaires* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$.

Remarque

- Soit $x \in E$. Alors
$$\mathrm{Vect}(x) = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$
Cet ensemble est aussi noté $\mathbb{K}x$.

Exercice 2

- Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose
$$A \coloneqq \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0\}.$$
Montrer que $\mathrm{Vect}(A) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition 1.12

On dit que deux éléments $x, y \in E$ sont *colinéaires* lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ ou $x = \lambda y$.

Remarques

- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

⇨ Il est possible que x et $y \in E$ soient colinéaires sans qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$. Cependant, si x et y sont colinéaires et $x \neq 0$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$.

Définition 1.13

On dit qu'un espace vectoriel E est une *droite vectorielle* lorsqu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = \mathbb{K}x$.

Remarque

⇨ Si E est une droite vectorielle, quel que soit $x \in E \setminus \{0\}$, $E = \mathbb{K}x$.

1.3 Application linéaire

Définition 1.14

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application f de E dans F est une *application linéaire* lorsque

$$\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Plus précisément, on dit que f est un
- *endomorphisme* lorsque $E = F$.
- *isomorphisme* lorsque f est bijective.
- *automorphisme* lorsque f est un endomorphisme et un isomorphisme.

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Remarques

⇨ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \quad & f(x + y) = f(x) + f(y), \\ \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad & f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{aligned}$$

De plus $f(0_E) = 0_F$.

⇨ Soit f un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. Lorsque F est stable par f, c'est-à-dire lorsque $f(F) \subset F$, la restriction de f à F, corestreinte à F, est un endomorphisme de F appelé endomorphisme *induit* à F.

Définition 1.15

On dit qu'une application f de E dans E est une *homothétie* lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \lambda x.$$

Les homothéties de E sont des endomorphismes.

Remarque

⇨ En particulier, Id_E est un endomorphisme de E.

Exercice 3

⇨ Soit E une droite vectorielle. Montrer que les homothéties sont les seuls endomorphismes de E.

Définition 1.16

On appelle *forme linéaire* sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté $E^\star$ et appelé *dual* de E.

Remarque

⇨ Si $E = \mathbb{K}^n$, alors $\varphi \in E^\star$ si et seulement si il existe $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Proposition 1.17

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
- L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.
- L'image directe par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.

Remarque

⇨ Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $x_1,\dots,x_n \in E$, alors

$$u(\text{Vect}(x_1,\dots,x_n)) = \text{Vect}(u(x_1),\dots,u(x_n)).$$

Définition 1.18

On appelle *noyau* de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et on note $\operatorname{Ker} f$ l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E \mid f(x) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

⇨ Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\operatorname{Ker}(\lambda f) = \operatorname{Ker} f$.

Proposition 1.19

Une application linéaire f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Définition 1.20

On appelle image de $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in E\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de F.

Remarques

⇨ f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

⇨ Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\operatorname{Im}(\lambda f) = \operatorname{Im} f$. En particulier $\operatorname{Im}(-f) = \operatorname{Im} f$.

Proposition 1.21

— La composée de deux applications linéaires est linéaire.
— La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

Remarques

⇨ Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, on dit que f et g *commutent* lorsque $f \circ g = g \circ f$. En général, deux endomorphismes ne commutent pas, comme le montre l'exemple des endomorphismes

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array}$$

⇨ Il est possible que $f \circ g = 0$ sans que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercices 4

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}.$$

⇨ Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

2 L'algèbre $\mathcal{L}(E)$

2.1 $\mathcal{L}(E,F)$

Proposition 2.1

$(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 2.2

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors

$$\begin{aligned}
&\forall f \in \mathcal{L}(F,G), \quad \forall g,h \in \mathcal{L}(E,F), \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \qquad f\circ(\lambda g+\mu h) = \lambda f\circ g + \mu f\circ h\\
&\forall f,g \in \mathcal{L}(F,G), \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}, \quad \forall h \in \mathcal{L}(E,F), \qquad (\lambda f+\mu g)\circ h = \lambda f\circ h + \mu g\circ h.
\end{aligned}$$

Définition 2.3

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
- $f^0 \coloneqq \mathrm{Id}_E$
- $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{n+1} \coloneqq f^n \circ f$.

Remarque

⇨ Attention, si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$, $f^2(x) = f(f(x))$ et non $f(x)^2$, expression qui n'a d'ailleurs aucun sens.

Proposition 2.4

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors

$$\begin{aligned}
\forall m,n \in \mathbb{N}, \qquad & f^{m+n} = f^m \circ f^n\\
& (f^m)^n = f^{mn}.
\end{aligned}$$

- Soit $f,g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f\circ g = g\circ f$. Alors, pour tout $n,m \in \mathbb{N}$, f^n et g^m commutent. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f\circ g)^n = f^n \circ g^n.$$

Exercice 5

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $K_n \coloneqq \operatorname{Ker} f^n$ et $I_n \coloneqq \operatorname{Im} f^n$. Montrer que les suites (K_n) et (I_n) sont respectivement croissantes et décroissantes au sens de l'inclusion.

Proposition 2.5

Soit $f,g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f\circ g = g\circ f$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k}\circ g^k \qquad \text{et} \qquad f^n - g^n = (f-g)\circ\left[\sum_{k=0}^{n-1} f^{(n-1)-k}\circ g^k\right].$$

Exercice 6

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit $\Delta, T \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) \coloneqq f(x+1) \quad \text{et} \quad \Delta(f)(x) \coloneqq f(x+1) - f(x).$$

Calculer T^k et Δ^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2.2 Le groupe linéaire

Définition 2.6

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme si et seulement si il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u\circ v = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad v\circ u = \mathrm{Id}_E.$$

Si tel est le cas, $v = u^{-1}$. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Proposition 2.7

$\mathrm{GL}(E)$ possède les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(E)\\
\forall f,g \in \mathrm{GL}(E), \qquad & g\circ f \in \mathrm{GL}(E)\\
\forall f \in \mathrm{GL}(E), \qquad & f^{-1} \in \mathrm{GL}(E).
\end{aligned}$$

Nous dirons que $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe, que l'on appelle *groupe linéaire*.

3 Somme, somme directe, projecteur, hyperplan

3.1 Somme, somme directe

Définition 3.1

On appelle *somme* de deux sous-espaces vectoriels A et B de E, et on note $A+B$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant A et B. On a

$$A+B=\{a+b : a \in A \quad b \in B\}.$$

Remarque

- Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur deux sous-espaces vectoriels A et B tels que $A+B=E$, alors $f=g$.

Exercices 7

- Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$. Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
- Soit A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E tels que $A \subset C$, $B \subset D$ et $A+B=C+B$. Montrer que $A+D=C+D$.

Définition 3.2

On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe lorsque

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad a+b=0 \quad \Longrightarrow \quad [a=0 \quad \text{et} \quad b=0].$$

Si tel est le cas, la somme $A+B$ est notée $A \oplus B$.

Remarque

- Deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe si et seulement si, quel que soit $x \in A+B$, l'écriture $x=a+b$ (avec $a \in A$ et $b \in B$) est unique.

Proposition 3.3

Deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe si et seulement si

$$A \cap B=\{0\}.$$

Définition 3.4

On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont *supplémentaires* lorsque A et B sont en somme directe et $A+B=E$, c'est-à-dire lorsque

$$A \oplus B=E.$$

Remarques

- Autrement dit, A et B sont supplémentaires lorsque pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(a, b) \in A \times B$ tel que $x=a+b$.
- Il est important de ne pas confondre « le complémentaire » et « un supplémentaire » d'un sous-espace vectoriel. En particulier, contrairement à un supplémentaire, le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel car il ne contient pas 0.
- En général un sous-espace vectoriel admet plusieurs supplémentaires.
- On peut démontrer que tout sous-espace vectoriel admet (au moins) un supplémentaire. Nous démontrerons ce point dans un autre chapitre, dans le cas où E est de dimension finie.

Exercice 8

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3=f^2+f$. Montrer que $E=\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

Proposition 3.5: Version géométrique du théorème du rang

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et A un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E. Alors

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

3.2 Projecteur

Définition 3.6

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, il existe un unique endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad p(a+b) = a.$$

On l'appelle *projecteur* sur A parallèlement à B

Définition 3.7

Si p est le projecteur sur A parallèlement à B, le projecteur q sur B parallèlement à A est appelé projecteur associé à p. On a

$$p + q = \operatorname{Id} \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0.$$

De plus, pour tout $x \in E$

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in A} + \underbrace{q(x)}_{\in B}$$

est la décomposition de x dans $E = A \oplus B$.

Proposition 3.8

Soit p le projecteur sur A parallèlement à B. Alors

$$\operatorname{Ker} p = B, \qquad \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}) = A, \qquad \operatorname{Im} p = A.$$

De plus $p \circ p = p$.

Remarque

⇨ En particulier, si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur

$$E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}) \quad \text{et} \quad E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p.$$

Proposition 3.9

$p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.

Exercices 9

⇨ Soit Re l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\operatorname{Re}(z)$. Montrer que Re est un projecteur de $\mathbb{C}$ lorsqu'il est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application φ de E dans E par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)](x) := f(0) + f'(0)x.$$

Montrer que φ est un projecteur. En déduire un supplémentaire du sous-espace vectoriel de E des fonctions affines.

Proposition 3.10

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et A, B deux sous-espaces supplémentaires de E. Étant donnés $f_A \in \mathcal{L}(A, F)$ et $f_B \in \mathcal{L}(B, F)$, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad f(a+b) = f_A(a) + f_B(b).$$

3.3 Symétrie

Définition 3.11

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, il existe un unique endomorphisme $s \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad s(a+b) = a - b.$$

On l'appelle *symétrie* par rapport à A parallèlement à B.

Proposition 3.12

Soit s la symétrie par rapport à A parallèlement à B. Alors

$$\operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) = A, \qquad \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}) = B.$$

De plus $s \circ s = \mathrm{Id}$. En particulier s est un automorphisme et $s^{-1} = s$.

Remarque

⇨ En particulier, si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie

$$E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{Id}).$$

Proposition 3.13

$s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Exercice 10

⇨ Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ l'application de E dans E qui à f associe la fonction $\varphi(f)$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\varphi(f)](x) \coloneqq f(-x).$$

Montrer que φ est une symétrie et en déduire que $E = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$ où $\mathcal{I}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions impaires et $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions paires.

3.4 Hyperplan

Définition 3.14

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *hyperplan* de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle.

Remarques

⇨ Un hyperplan est un sous-espace vectoriel strict de E.

⇨ Si $E = \mathbb{K}^n$, les hyperplans sont les parties H de E telles qu'il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}.$$

En particulier, les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites passant par $(0,0)$ et les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans passant par $(0,0,0)$.

Proposition 3.15

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E.

— Si H est un hyperplan, quel que soit $x_0 \in E \setminus H$, $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

— Si H admet une droite vectorielle pour supplémentaire, alors c'est un hyperplan.

Remarque

⇨ On en déduit qu'un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si c'est un supplémentaire d'une droite vectorielle.

Proposition 3.16

Soit H un hyperplan de E et φ_0 une forme linéaire telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi_0$. Alors l'ensemble des formes linéaires de E dont le noyau est H est

$$\mathbb{K}^* \varphi_0 = \{\lambda \varphi_0 : \lambda \in \mathbb{K}^*\}.$$