Équations différentielles

« J'entends et j'oublie. Je vois et je me souviens. Je fais et je comprends. »

— Confucius (551–479 AV J.C.)

« Les calculs sont pas bons, Kevin ! »

— Inès Reg (2019)

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 1.1

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I. On appelle solution sur I de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $ay' + by = c$, toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$, dérivable sur I, telle que

$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

On dit que l'équation est *résolue* lorsque a ne s'annule pas et qu'elle est *homogène* lorsque la fonction c est nulle.

Remarque

⇨ Lorsque l'équation est résolue, on peut l'écrire sous la forme

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = F(y(t), t)$$

où F est une fonction de $\mathbb{K} \times I$ dans $\mathbb{K}$.

1.1 Équation différentielle homogène

Proposition 1.2

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. Si A est une primitive de a sur I, les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

sont les fonctions

$$\begin{array}{rccc} y_\lambda : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Remarques

- Dans cette démonstration, le terme $e^{A(t)}$ par lequel on multiplie l'équation différentielle afin de faire apparaître la dérivée d'un produit est appelé *facteur intégrant.*
- Si y est une solution non nulle de l'équation différentielle homogène $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, elle ne s'annule pas.

Exercices 1

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + ay(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)y'(t) + ty(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = f(x)f(y).$$

1.2 Équation différentielle avec second membre

Proposition 1.3: Théorème de superposition

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions définies sur un intervalle I. Si y_p est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

alors, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0.$$

Remarques

- Soit a et $b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues. On souhaite trouver une solution particulière à l'équation différentielle

$$(E) \qquad \forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

  La section précédente nous a permis de trouver une solution y_0 non nulle à l'équation différentielle homogène associée $y'(t) + a(t)y(t) = 0$. De plus, nous avons vu qu'une telle fonction ne s'annule pas. On va chercher une solution de (E) sous la forme $y(t) := \lambda(t)y_0(t)$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable. On se donne donc une fonction dérivable $\lambda : I \to \mathbb{K}$ et on pose $y := \lambda y_0$. Alors y est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = \lambda'(t)y_0(t) + \lambda(t)y_0'(t).$$

  En injectant cette expression dans (E), on en déduit que y est solution de (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \lambda'(t) = \frac{b(t)}{y_0(t)}.$$

  En particulier, si λ est une primitive de b/y_0, y est une solution « particulière » de (E). Remarquons que, puisque y_0 ne s'annule pas, toute fonction dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ s'écrit sous la forme $y = \lambda y_0$ où $\lambda : I \to \mathbb{K}$ est une fonction dérivable. Cette méthode permet donc de trouver toutes les solutions de (E).
- La méthode précédente, appelée « *méthode de la variation de la constante* », se généralise à toute équation différentielle *linéaire*. Si y_0 est une solution ne s'annulant pas de l'équation différentielle homogène associée, le changement de fonction $y = \lambda y_0$ permet de ramener la résolution de l'équation différentielle initiale à la résolution d'une équation différentielle linéaire en λ' d'ordre strictement inférieur.
- Remarquons enfin que la technique consistant à multiplier l'équation différentielle par le facteur intégrant permet de résoudre les équations différentielles avec second membre de la même manière que les équations différentielles homogènes.

Exercices 2

- Résoudre l'équation différentielle

$$\forall t > 0, \quad y'(t) - \frac{y(t)}{t} = te^t.$$

- Résoudre l'équation différentielle $(t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1 + \ln t)$ sur $]0, 1[$.

1.3 Problème de Cauchy

Définition 1.4: Problème de Cauchy

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. On appelle *problème de Cauchy* la recherche des solutions y de l'équation différentielle du premier ordre

$$\forall t \in I, \quad a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

telles que $y\left(t_0\right) = y_0$.

Remarque

⇨ La condition $y(t_0) = y_0$ est appelée *condition initiale.*

Théorème 1.5: Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors, il existe une et une seule solution à l'équation différentielle résolue du premier ordre

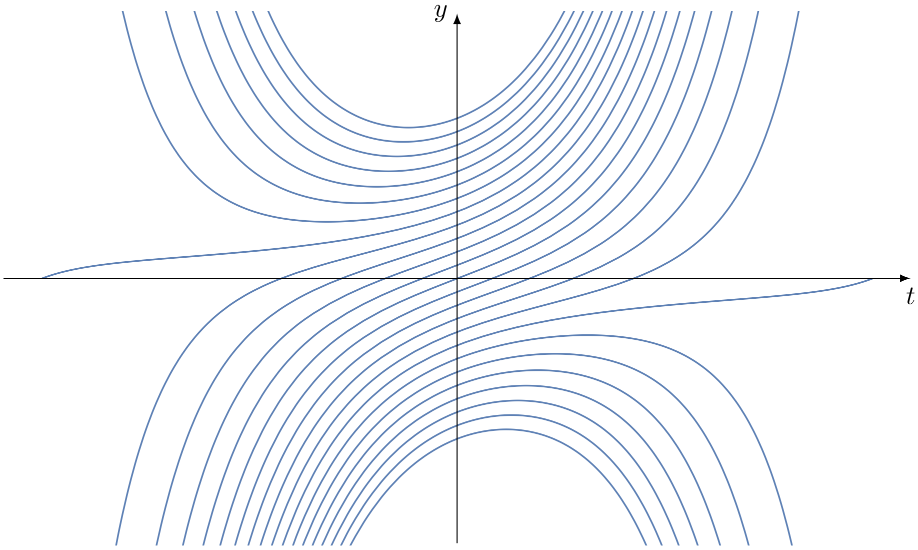
$$\forall t \in I, \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

telle que $y\left(t_0\right) = y_0$.

Remarques

⇨ Graphiquement, cette proposition signifie que par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe un et un seul graphe (appelé courbe intégrale) de solution de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. En particulier, les courbes intégrales ne se croisent pas. Par exemple, voici quelques solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = ty(t) + 1.$$



⇨ Le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve que la connaissance à l'instant t_0 d'un système régi par une équation différentielle résolue du premier ordre permet de connaitre complètement son passé et son futur.

Exercices 3

⇨ Résoudre sur $]0, +\infty[$ le problème de Cauchy

$$y(1) = 1 \quad \text{et} \quad y'(t) + \frac{y(t)}{t} = t.$$

Tracer le graphe de la solution.

⇨ Montrer que les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) + t \operatorname{Arctan}(t^4 + 1)y(t) = \operatorname{sh} t$$

sont toutes paires.

1.4 Équation différentielle non résolue

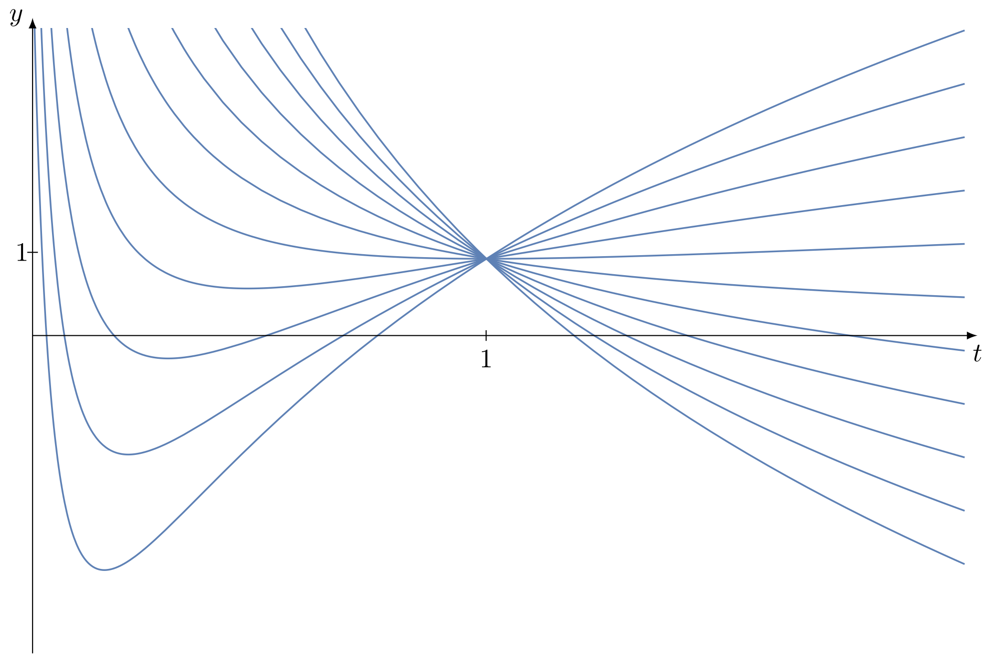
Exercice 4

⇨ Résoudre l'équation différentielle $(t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1 + \ln t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

⇨ Pour les équations différentielles non résolues du premier ordre, contrairement à ce qui se passe pour les équations résolues, il est possible qu'un problème de Cauchy admette plusieurs solutions ou aucune. Voici par exemple plusieurs solutions au problème de Cauchy

$$y(1) = 1, \quad \text{et} \quad \forall t > 0, \quad (t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1 + \ln t).$$



On peut aussi remarquer que pour $y_0 \neq 1$, il n'existe aucune solution de cette équation différentielle vérifiant $y(1) = y_0$.

2 Équation différentielle linéaire du second ordre

Définition 2.1

Soit $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I. On appelle solution sur I de l'équation différentielle linéaire du second ordre $ay'' + by' + cy = d$, toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$, dérivable deux fois sur I, telle que

$$\forall t \in I, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t).$$

On dit que l'équation est *résolue* lorsque a ne s'annule pas et qu'elle est *homogène* lorsque la fonction d est nulle.

2.1 Équation différentielle homogène

Proposition 2.2

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$.

— Si cette équation possède deux racines distinctes r_1 et r_2 $(\Delta \neq 0)$, alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

— Si cette équation admet une racine double r $(\Delta = 0)$, alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Exercice 5

⇨ Résoudre l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Proposition 2.3

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$.

— Si cette équation possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ($\Delta > 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu \mathrm{e}^{r_2 t} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet une racine double r ($\Delta = 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r + \mathrm{i}\omega$ et $r - \mathrm{i}\omega$ ($\Delta < 0$), alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions

$$y_{\lambda,\mu} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & [\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)]\,\mathrm{e}^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarque

⇨ Dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, les solutions de (E) peuvent s'écrire sous la forme

$$y_{\lambda,\varphi} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \sin(\omega t - \varphi)\,\mathrm{e}^{rt} \end{array}$$

où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$. Lors de la recherche effective de tels coefficients, quitte à changer φ en $\varphi + \pi$, on impose souvent $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Exercices 6

⇨ Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.

⇨ Soit $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega_0^2 y = 0$.

⇨ En effectuant le changement de fonction inconnue $z(t) = t^2 y(t)$, résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad t^2 y''(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y(t) = 0.$$

⇨ En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{u}$, résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad ty''(t) - y'(t) + 4t^3 y(t) = 0.$$

2.2 Équation différentielle avec second membre

Proposition 2.4: Théorème de superposition

Soit $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I. Si y_p est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0.$$

Proposition 2.5: Théorème de superposition

— Soit $a, b, c, d_1, d_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $y_{p_1}, y_{p_2} : I \to \mathbb{K}$ des solutions « particulières » des équations différentielles respectives $ay''+by'+cy = d_1$ et $ay''+by'+cy = d_2$. Alors $\lambda y_{p_1} + \mu y_{p_2}$ est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t).$$

— Soit $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ et $d : I \to \mathbb{C}$ des fonctions définies sur un intervalle I et $y_p : I \to \mathbb{C}$ une solution « particulière » de l'équation différentielle $ay''+by'+cy = d$. Alors $\mathrm{Re}(y_p)$ est une solution « particulière » de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = \mathrm{Re}(d(t)).$$

Remarque

⇨ Bien entendu, une proposition similaire existe pour la partie imaginaire.

Proposition 2.6

Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Si P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

admet comme solution une (unique) fonction du type $t \mapsto t^m Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n et m est l'ordre de α comme racine de l'équation caractéristique (avec par convention $m = 0$ si α n'est pas racine de cette équation).

Exercices 7

⇨ Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2$.

⇨ Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = t\cos t$.

2.3 Problème de Cauchy

Définition 2.7: Problème de Cauchy

Soit $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions définies sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. On appelle *problème de Cauchy* la recherche des solutions y de l'équation différentielle du second ordre

$$\forall t \in I, \quad a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = d(t)$$

telles que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

Théorème 2.8: Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Alors il existe une et une seule solution à l'équation différentielle résolue du second ordre

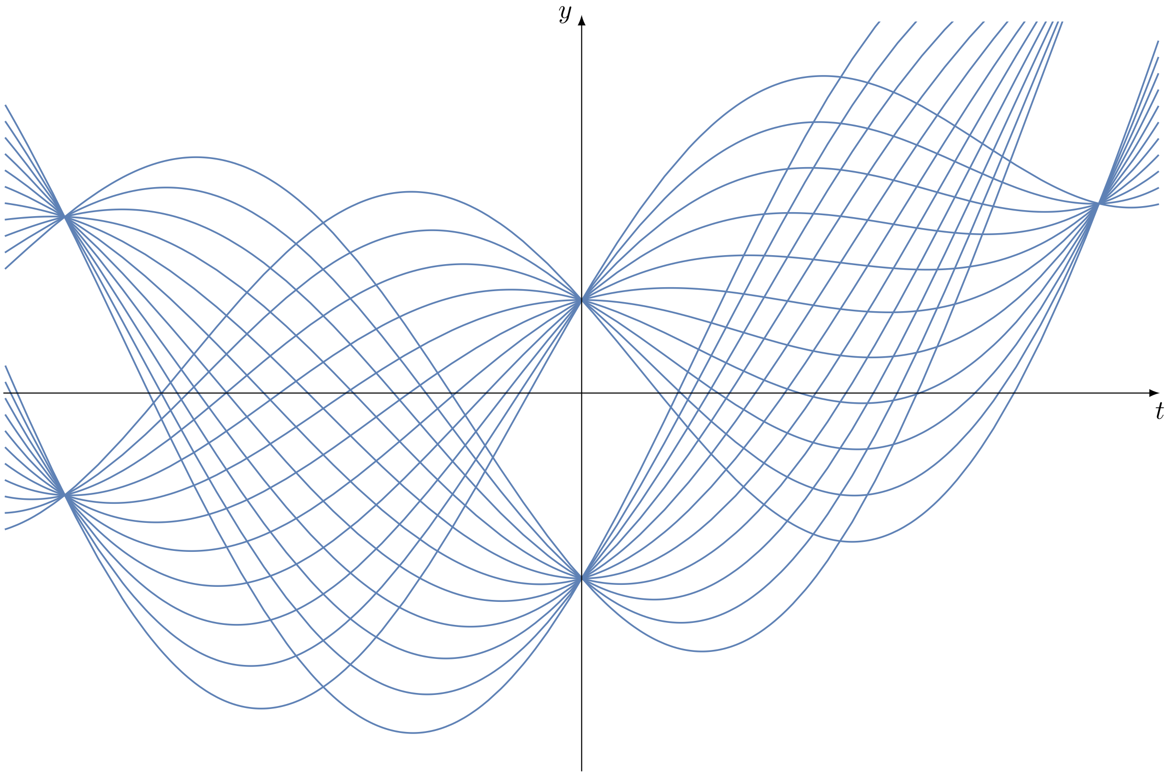
$$\forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

telle que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

Remarques

⇨ Graphiquement, cette proposition signifie que par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe un et un seul graphe de pente $y_1 \in \mathbb{R}$, solution de l'équation différentielle $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$. Les courbes intégrales peuvent se croiser, mais doivent avoir des pentes différentes lorsqu'elles se croisent. Par exemple, voici quelques solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t.$$



⇨ Le théorème de Cauchy-Lipschitz prouve que la connaissance de la valeur de y et de sa dérivée à l'instant t_0 d'un système régi par une équation différentielle résolue du second ordre permet de connaitre complètement son passé et son futur.

Exercice 8

⇨ Résoudre le problème de Cauchy

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad y''(t) + y(t) = \frac{1}{2}t^2 + t.$$