Dimension finie

Table des matières

1 Famille libre, famille génératrice, base

1.1 Famille libre

Définition 1.1

On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ est *libre* lorsque quels que soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0 \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0.$$

Sinon, on dit qu'elle est *liée*. Dans ce cas, toute relation du type $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0$ où les λ_k ne sont pas tous nuls est appelée *relation de liaison*.

Exercices 1

- ⇨ Montrer que la famille $((1,2,3),(4,5,6),(5,2,1))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
- ⇨ Montrer que sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $\sin, \cos$ est libre. Que dire si on lui adjoint la fonction $x \mapsto \sin(x+\pi/4)$?
- ⇨ Sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, montrer que si $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ sont tels que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$, la famille des fonctions d'expressions $\mathrm{e}^{\alpha_1 x}, \mathrm{e}^{\alpha_2 x}, \dots, \mathrm{e}^{\alpha_p x}$ est libre.
- ⇨ Montrer que la famille $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ est libre dans $\mathbb{R}$ considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
- ⇨ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que la famille $((1,2,0),(2,1,1),(3,3,\lambda))$ soit une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Remarques

- ⇨ Lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on dit aussi que $x_1, \dots, x_n$ sont *linéairement indépendants*.
- ⇨ Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre d'éléments de E alors, quels que soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_p x_p$$

  on a $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_p = \mu_p$. La liberté d'une famille permet donc « d'identifier » les coefficients d'une combinaison linéaire.
- ⇨ Une famille composée d'un unique vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

- ⇨ Une famille $(x, y) \in E^2$ formée de deux vecteurs est liée si et seulement si ces vecteurs sont *colinéaires*, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$. Plus généralement, une famille est liée si et seulement si il existe un vecteur qui est combinaison linéaire des autres.
- ⇨ Une famille libre reste libre lorsqu'on effectue une permutation de ses vecteurs ou lorsqu'on retire certains de ses vecteurs. En particulier, une famille libre ne contient ni vecteur nul, ni doublon, ni vecteurs colinéaires.
- ⇨ Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille libre et si $x \in E \setminus \mathrm{Vect}\,(x_1, ..., x_p)$, alors la famille $(x_1, \dots, x_p, x)$ est libre.
- ⇨ Sur $\mathbb{C}$, considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(1, \mathrm{i})$ est libre. Cependant, si $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, elle est liée. La notion de liberté dépend donc du corps considéré.

Proposition 1.2

L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.

1.2 Famille génératrice

Définition 1.3

On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ est *génératrice* de E lorsque, quel que soit $x \in E$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que
$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p.$$
Autrement dit, la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice si et seulement si $\mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_p) = E$.

Remarques

- ⇨ Une famille génératrice reste génératrice lorsqu'on effectue une permutation de ses vecteurs ou lorsqu'on lui rajoute d'autres vecteurs.
- ⇨ Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice et si $x_p \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \dots, x_{p-1})$, alors la famille $(x_1, \dots, x_{p-1})$ est génératrice.

Exercices 2

- ⇨ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la famille $((1, 2, 0), (2, 1, 1), (3, 3, \lambda))$ soit une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- ⇨ Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer que la famille $(1, X - \alpha, (X - \alpha)^2, \dots, (X - \alpha)^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 1.4

Soit f et g deux applications linéaires de E dans F. On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice de E telle que
$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad f(x_k) = g(x_k).$$
Alors $f = g$.

Exercice 3

- ⇨ Montrer la formule de Simpson.
$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{P(0) + 4P(1/2) + P(1)}{6}.$$

Proposition 1.5

Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que chaque élément d'une famille génératrice $(y_1, \dots, y_p)$ de F admet au moins un antécédent par f. Alors f est surjective.

Proposition 1.6

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors l'image $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ d'une famille génératrice $(x_1, \dots, x_p)$ de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$. En particulier, si f est surjective, l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

1.3 Base

Définition 1.7

On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ est une *base* de E lorsque, quel que soit $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Autrement dit, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

Remarques

- Si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $x \in E$, les $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ sont appelées *coordonnées* de x relativement à la base $\mathcal{B}$.
- Une base reste une base lorsqu'on effectue une permutation de ses vecteurs.

Définition 1.8

- Si $n \in \mathbb{N}$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ définie par

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad e_k := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

  est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée *base canonique*.
- Si $n \in \mathbb{N}$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle *base canonique* de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Si $p, q \in \mathbb{N}$, la famille $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant p}$ des matrices élémentaires est une base de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ appelée *base canonique*.

Proposition 1.9

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que E admette une base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors, quel que soit $(y_1, \dots, y_n) \in F^n$, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad f(e_k) = y_k.$$

De plus
- f est injective si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est libre.
- f est surjective si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est génératrice dans F.
- f est un isomorphisme si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est une base de F.

Exercice 4

- On pose $E := \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}$ et $u \neq \mathrm{Id}$.

Proposition 1.10

Soit A et B deux sous-espaces vectoriels de E, $\mathcal{A} := (a_1, \dots, a_p)$ une famille d'éléments de A et $\mathcal{B} := (b_1, \dots, b_q)$ une famille d'éléments de B. On pose $\mathcal{E} := (a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$.
- Si A et B sont en somme directe et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont libres, alors $\mathcal{E}$ est libre.
- Si $A + B = E$ et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont respectivement génératrices de A et B, alors $\mathcal{E}$ est génératrice de E.
- Si $A \oplus B = E$ et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont respectivement des bases de A et B, alors $\mathcal{E}$ est une base de E. On dit qu'une telle base est *adaptée* à la décomposition $E = A \oplus B$.

Définition 1.11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit $e_i^\star$ comme étant l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ telle que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad e_i^\star(e_j) = \delta_{i,j}.$$

La forme linéaire $e_i^\star$ associe à $x \in E$ la i-ième coordonnée de x relativement à la base $\mathcal{B}$. Les applications $e_i^\star$ sont appelées *formes coordonnées* relativement à la base $\mathcal{B}$.

Remarques

- Si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} e_k^\star(x) e_k.$$

- Si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad e_k^\star(x) = x_k.$$

Proposition 1.12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$. Alors $(e_1^\star, \dots, e_n^\star)$ est une base de $E^\star$, appelée *base duale* de $\mathcal{B}$.

Remarque

- Dans $E := \mathbb{K}^n$, si $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de E et $\varphi \in E^*$, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que
$$\varphi = a_1 e_1^* + \cdots + a_n e_n^*.$$
Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a donc $\varphi(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$.

1.4 Cas des familles infinies

Définition 1.13

On dit qu'une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est *presque nulle* lorsqu'il existe une partie finie $J := \{i_1, \dots, i_n\}$ de I telle que
$$\forall i \in I \setminus J, \quad \lambda_i = 0.$$
On note $\mathbb{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$ indexées par I.

Remarques

- Si I est fini, toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par I est presque nulle. Cette notion n'a donc d'intérêt que lorsque I est infini.
- Si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$, on appelle *support* de cette famille l'ensemble
$$J := \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}.$$
Les familles presque nulles sont donc les familles à support fini.
- Une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque nulle si et seulement si elle est nulle à partir d'un certain rang. En particulier, la famille des coefficients d'un polynôme est presque nulle.

Définition 1.14

Soit $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments de E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $J := \{i_1, \dots, i_n\}$ une partie de I en dehors de laquelle λ_i est nul. On définit alors
$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i := \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} x_{i_k}.$$

Remarques

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la famille de ses coefficients, alors
$$P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k.$$
- Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ deux familles presque nulles d'éléments de $\mathbb{K}$. On pose
$$x := \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad y := \sum_{i \in I} \mu_i x_i.$$
Alors, quels que soient λ et $\mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda\lambda_i + \mu\mu_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle et
$$\lambda x + \mu y = \sum_{i \in I} (\lambda\lambda_i + \mu\mu_i) x_i.$$

Proposition 1.15

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. Alors

$$\operatorname{Vect}\{x_i : i \in I\} = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i x_i : (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\}.$$

Définition 1.16

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est *libre* lorsque, quelle que soit la famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in I, \quad \lambda_i = 0.$$

Sinon, on dit qu'elle est *liée*. Dans ce cas, toute relation du type $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ où les λ_i ne sont pas tous nuls est appelée *relation de liaison*.

Remarques

- On dit qu'une partie A de E est libre lorsque la famille de ses éléments est libre.
- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est libre si et seulement si toute sous-famille finie de $(x_i)_{i\in I}$ est libre, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $i_1, \dots, i_n \in I$ deux à deux distincts et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_1 x_{i_1} + \dots + \lambda_n x_{i_n} = 0$$

  on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- Une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

  on a $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exercice 5

- Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. Montrer qu'elle est libre.

Définition 1.17

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est *génératrice* de E lorsque, quel que soit $x \in E$, il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i.$$

Autrement dit, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice si et seulement si $\operatorname{Vect}\{x_i : i \in I\} = E$.

Remarques

- On dit qu'une partie A de E est génératrice lorsque la famille de ses éléments est génératrice.
- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est génératrice de E si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe $i_1, \dots, i_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{i_k}.$$

- Comme dans le cas des familles finies, si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ coïncident sur une famille génératrice de E, alors $f = g$. De même, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et que chaque élément d'une famille génératrice de F admet un antécédent par f, alors f est surjective.
- Enfin, l'image par une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.

Définition 1.18

On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est une *base* de E lorsque, quel que soit $x \in E$, il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i.$$

Autrement dit, la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice.

Remarques

⇨ Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $x \in E$, la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ est appelée famille des *coordonnées* de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

⇨ Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(y_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de F, alors il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que
$$\forall i \in I, \quad f(e_i) = y_i.$$
De plus, f est injective si et seulement si $(y_i)_{i\in I}$ est libre, f est surjective si et seulement si $(y_i)_{i\in I}$ est génératrice de F et f est un isomorphisme si et seulement si $(y_i)_{i\in I}$ est une base de F.

⇨ La proposition sur les sommes de sous-espaces vectoriels et les familles s'énonce de manière similaire avec des familles infinies.

Définition 1.19

La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée *base canonique*.

Remarque

⇨ Si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients de P est la famille des coordonnées de P dans la base canonique.

2 Dimension

2.1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 2.1

On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de *dimension finie* lorsqu'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de *dimension infinie*.

Remarque

⇨ $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie. $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Proposition 2.2: Lemme de Steinitz

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(g_1, \dots, g_q)$ une famille génératrice de E.

— Toute famille libre de E possède au plus q éléments.

— Il est possible de compléter toute famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_p, g_{i_{p+1}}, \dots, g_{i_n})$ de E où $g_{i_{p+1}}, \dots, g_{i_n}$ sont des éléments de la famille $(g_1, \dots, g_q)$.

Remarque

⇨ Pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie, il suffit donc de trouver des familles libres possédant autant d'éléments que l'on souhaite.

Exercice 6

⇨ À l'aide d'éléments de la famille $(1, X, X^2)$, compléter la famille $(X^2 - 1, X^2 + 1)$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 2.3: Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

— Toute famille libre se complète en une base finie de E.

— Il est possible d'extraire une base finie de toute famille génératrice de E.

Proposition 2.4

Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.

Remarques

⇨ On en déduit qu'un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si il admet une base finie.

⇨ On peut montrer que tout espace vectoriel admet une base mais ce théorème est peu utile, hors programme, difficile à montrer et fait appel à l'axiome du choix.

2.2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 2.5

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'éléments ; on appelle *dimension* de E et on note $\dim E$ cet entier.

Remarques

⇨ Un espace vectoriel E est de dimension nulle si et seulement si $E = \{0\}$. On appelle *droite vectorielle* tout espace vectoriel de dimension 1, c'est-à-dire tout espace vectoriel E tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = \mathbb{K}x$. On appelle *plan vectoriel* tout espace vectoriel de dimension 2.

⇨ Considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathbb{C}$ est de dimension 2. Cependant, $\mathbb{C}$ est de dimension 1 lorsqu'on le considère comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. La dimension est donc une notion qui dépend du corps.

Exercices 7

⇨ Dans $\mathbb{R}^3$, donner une base du sous-espace vectoriel d'équation $x + y + z = 0$.

⇨ Dans $\mathbb{R}_2[X]$, donner une base puis la dimension du sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

⇨ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

Proposition 2.6

— Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
— Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$.
— Si $p, q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension pq.

Remarques

⇨ En particulier, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2.

⇨ $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont de dimension $n(n+1)/2$. $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est de dimension $n(n-1)/2$.

Proposition 2.7

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p éléments de E.
— Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$.
— Si $(x_1, \ldots, x_p)$ est génératrice, alors $p \geqslant n$.

Exercice 8

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent de E. En notant m le plus petit entier tel que $f^m = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x))$ est libre. Que peut-on en déduire sur m ?

Proposition 2.8

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie et $\dim E = \dim F$. En particulier, si E est de dimension n, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Exercices 9

⇨ Soit $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ et E l'ensemble des suites (u_n) à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0 u_n.$$

Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & (u_n) & \longmapsto & (u_0, \ldots, u_{p-1}) \end{array}$$

est un isomorphisme. En déduire que E est de dimension finie et que $\dim E = p$.

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0.$$

Montrer que si $t_0 \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & y & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{array}$$

est un isomorphisme. En déduire que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

2.3 Existence et unicité en dimension finie

Proposition 2.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors
- Toute famille libre de E comportant n éléments est une base de E.
- Toute famille génératrice de E comportant n éléments est une base de E.

Autrement dit, si la famille $\mathcal{F}$ est composée de n éléments,

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est une base} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ est génératrice.}$$

Proposition 2.10

Soit $\mathcal{B} := (P_0, \ldots, P_n)$ une famille de polynômes de degrés *échelonnés*, c'est-à-dire telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \deg P_k = k.$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercices 10

⇨ Montrer que l'application de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à P associe $P(X+1) - P(X)$ est surjective.

⇨ Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par dérivation ?

Proposition 2.11

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.
- Si f est injective et $\dim E = \dim F$, alors f est un isomorphisme.
- Si f est surjective et $\dim E = \dim F$, alors f est un isomorphisme.

Autrement dit, si $\dim E = \dim F$

$$f \text{ est injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Remarques

⇨ Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, pour montrer que c'est un automorphisme, il suffit de montrer qu'il est injectif (ou surjectif).

⇨ Ce théorème est faux si E et F ne sont pas de même dimension ou si ils sont de dimension infinie. Par exemple, les applications linéaires

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (x, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} g : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P & \longmapsto & XP \end{array}$$

sont injectives mais pas surjectives. De même, les applications linéaires

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccl} f : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

sont surjectives mais ne sont pas injectives.

Proposition 2.12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors
- f est inversible si et seulement si f est inversible à gauche, c'est-à-dire si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Si tel est le cas, $g = f^{-1}$ et en particulier $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
- f est inversible si et seulement si f est inversible à droite, c'est-à-dire si et seulement si il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Si tel est le cas, $g = f^{-1}$ et en particulier $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

2.4 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition 2.13

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace vectoriel de E. Alors
- A est de dimension finie et $\dim A \leqslant \dim E$.
- $A = E$ si et seulement si $\dim A = \dim E$.

Remarque

⇨ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et A un sous-espace vectoriel de E de dimension p, toute base $\mathcal{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de A est appelée *base adaptée* au sous-espace vectoriel A.

Exercice 11

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathrm{GL}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par u, alors $u(F) = F$ et F est stable par u^{-1}.

Proposition 2.14

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.

Exercice 12

⇨ Trouver un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de l'espace vectoriel engendré par $(1, 1, 1)$.

Remarque

⇨ Si E est de dimension infinie, on peut montrer que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire, mais ce théorème est peu utile, hors programme, difficile à démontrer et fait appel à l'axiome du choix.

2.5 Notion de rang

Définition 2.15

Soit f une application linéaire de E dans F. Lorsque $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, on appelle *rang* de f et on note $\operatorname{rg} f$ la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Remarques

⇨ Si F est de dimension finie, $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et $\operatorname{rg} f \leqslant \dim F$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si f est surjective.

⇨ Si E est de dimension finie, $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et $\operatorname{rg} f \leqslant \dim E$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si f est injective.

⇨ Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim f(A) \leqslant \dim A$.

⇨ Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\operatorname{rg} u = 0$ si et seulement si $u = 0$.

Exercice 13

⇨ Calculer le rang de l'application de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même qui à P associe $P(X+1) - P(X)$.

Proposition 2.16

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n et f une application linéaire de E dans F. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\operatorname{rg} f = n$.

Proposition 2.17

- Soit E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors
$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(g) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg}(f).$$
- On ne change pas le rang d'une application linéaire si on la compose à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Définition 2.18

On appelle *rang* d'une famille $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ et on note $\operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$ la dimension de $\operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$.

Remarque

⇨ Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors

$$\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant p \qquad \text{et} \qquad \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) \leqslant n.$$

De plus

— $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$ si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

— $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p) = n$ si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice.

3 Calcul de dimension et de rang, hyperplan

3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 3.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A, B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors

$$\dim E = \dim A + \dim B.$$

Proposition 3.2: Formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim (A + B) = \dim A + \dim B - \dim (A \cap B).$$

Remarque

⇨ En particulier, $\dim(A + B) \leqslant \dim A + \dim B$ et cette inégalité est une égalité si et seulement si A et B sont en somme directe.

Exercices 14

⇨ Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que l'intersection de deux plans vectoriels est soit un plan soit une droite.

Proposition 3.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A et B deux sous-espaces vectoriels de E.

— Si $A \cap B = \{0\}$ et $\dim E = \dim A + \dim B$, alors $E = A \oplus B$.

— Si $E = A + B$ et $\dim E = \dim A + \dim B$, alors $E = A \oplus B$.

Autrement dit, si $\dim E = \dim A + \dim B$

$$A \text{ et } B \text{ sont en somme directe} \iff E = A \oplus B \iff E = A + B.$$

3.2 Produit d'espaces vectoriels, espace $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 3.4

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim (E \times F) = \dim E + \dim F.$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}$, E^n est de dimension finie et

$$\dim (E^n) = n \dim E.$$

Proposition 3.5

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F.$$

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie et

$$\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2.$$

Proposition 3.6

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E^\star$ est de dimension finie et

$$\dim E^\star = \dim E.$$

3.3 Théorème du rang

Théorème 3.7: Théorème du rang

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application linéaire de E dans F. Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Autrement dit

$$\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f.$$

Remarque

- Le théorème du rang permet de retrouver le fait que si f est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de même dimension, alors il suffit de montrer que f est injective ou surjective pour montrer que f est un isomorphisme.

Exercices 15

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

  Déterminer le noyau de φ, son rang, puis son image.

- Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\dim [f(A)] = \dim A - \dim (A \cap \operatorname{Ker} f)$$

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $g \in \mathcal{L}(E)$. Calculer le rang de

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

- Soit E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(F, E)$ et $g \in \mathcal{L}(G, E)$. Montrer qu'il existe une application linéaire h de F dans G telle que $f = g \circ h$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.

3.4 Hyperplan

Proposition 3.8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement si $\dim H = n - 1$.

Exercices 16

- Dans $\mathbb{R}^3$, donner la dimension du sous-espace vectoriel d'équation $3x + 2y - z = 0$.
- Dans $\mathbb{R}_n[X]$, donner la dimension du sous-espace vectoriel

$$H := \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et φ_1, φ_2 deux formes linéaires sur E. Calculer le rang de

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \end{array}$$

  en fonction de φ_1 et φ_2.

- Quelle est la dimension de l'intersection de deux hyperplans ?

Proposition 3.9

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

— Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ ne sont pas tous nuls, l'ensemble H d'équation

$$a_1 e_1^\star(x) + \cdots + a_n e_n^\star(x) = 0$$

est un hyperplan de E.

— Réciproquement, si H est un hyperplan de E, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$a_1 e_1^\star(x) + \cdots + a_n e_n^\star(x) = 0$$

est une équation de H. De plus, si $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$, alors

$$b_1 e_1^\star(x) + \cdots + b_n e_n^\star(x) = 0$$

est une équation de H si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad b_k = \alpha a_k.$$

Proposition 3.10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

— L'intersection de p hyperplans est de dimension supérieure ou égale à $n - p$.

— Si $p \in [\![0, n]\!]$, tout sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ est l'intersection de p hyperplans.

4 Sous-espace affine

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Nous avons vu que les éléments de E sont naturellement des vecteurs. Dans cette partie, nous allons voir les éléments de E comme des points. Afin de marquer cette différence de point de vue, nous utiliserons dans cette partie les lettres a, b, c, d du début de l'alphabet pour désigner les éléments de E que nous considérerons comme des points et les lettres x, y, z de la fin de l'alphabet pour désigner les éléments de E que nous considérerons comme des vecteurs.

Définition 4.1

Soit $a, b \in E$. On définit le vecteur $\overrightarrow{ab} \in E$ par

$$\overrightarrow{ab} := b - a.$$

Proposition 4.2

— Quel que soit $a \in E$, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ b & \longmapsto & \overrightarrow{ab} \end{array}$$

est bijective.

— Quels que soient $a, b, c \in E$

$$\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}.$$

Remarque

⇨ Soit $a \in E$ et $x \in E$. Alors $b := a + x$ est l'unique élément de E tel que $\overrightarrow{ab} = x$.

Définition 4.3

Soit $x \in E$. On appelle translation de vecteur x l'application

$$\tau_x : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ a & \longmapsto & a + x. \end{array}$$

Remarques

⇨ Si $x, y \in E$, alors $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$.

⇨ Si $x \in E$, l'application τ_x est linéaire si et seulement si $x = 0$. Dans ce cas, $\tau_x = \mathrm{Id}$.

Définition 4.4

On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E est un *sous-espace affine* de E lorsqu'il existe $a \in E$ et un sous-espace vectoriel F de E tel que

$$\mathcal{F} = \{a + x : x \in F\}.$$

On écrit alors $\mathcal{F} = a + F$. De plus $a \in \mathcal{F}$ et

$$F = \left\{ \overrightarrow{bc} : b, c \in \mathcal{F} \right\}.$$

On dit que F est la *direction* de $\mathcal{F}$.

Remarques

⇨ En particulier, un sous-espace affine est non vide.

⇨ Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de direction F, alors, quel que soit $a \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = a + F$.

⇨ Un sous-espace vectoriel est un sous-espace affine. Réciproquement, un sous-espace affine est un sous-espace vectoriel si et seulement si il contient 0.

Exercices 17

⇨ Déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ de

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 1 \end{cases}$$

et l'exprimer comme un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$.

⇨ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante et exprimer son ensemble de solutions comme un sous-espace affine de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$$y' + 2y = x^2 - 2x + 3.$$

Proposition 4.5

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{S} \coloneqq \{a \in E \mid u(a) = b\}$$

de solutions de l'équation $u(a) = b$ est

- Soit vide.
- Soit un sous-espace affine de E de direction $\operatorname{Ker} u$.

Remarque

⇨ En particulier, si $a_0 \in E$ est une solution de l'équation $u(a) = b$, l'ensemble des solutions de cette équation est

$$a_0 + \operatorname{Ker} u = \{a_0 + x : x \in \operatorname{Ker} u\}.$$

Proposition 4.6

Soit $(\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de E et $(F_i)_{i \in I}$ la famille de leurs directions respectives. On pose

$$\mathcal{F} \coloneqq \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \qquad \text{et} \qquad F \coloneqq \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Alors

- Soit $\mathcal{F}$ est vide. Dans ce cas, ce n'est pas un sous-espace affine.
- Soit $\mathcal{F}$ est non vide. Dans ce cas, c'est un sous-espace affine de E de direction F.