Fonctions de deux variables

Table des matières

1 Limite, continuité

1.1 Notion d'ouvert

Proposition 1.1

On note $\|.\|$ la norme dérivant du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$. On rappelle que

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^2, &\qquad \|x\| \geqslant 0 \\
\forall x \in \mathbb{R}^2, &\qquad \|x\| = 0 \iff x = (0,0) \\
\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, &\qquad \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \\
\forall x, y \in \mathbb{R}^2, &\qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \\
\forall x, y \in \mathbb{R}^2, &\qquad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|
\end{aligned}$$

Proposition 1.2

$$\begin{aligned}
\forall\,(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, &\qquad |x_1| \leqslant \|(x_1,x_2)\| \quad \text{et} \quad |x_2| \leqslant \|(x_1,x_2)\| \\
\forall\,(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, &\qquad \|(x_1,x_2)\| \leqslant |x_1| + |x_2|
\end{aligned}$$

Définition 1.3

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

— On appelle *boule ouverte* de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B_O\,(x_0, r) \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x - x_0\| < r\right\}.$$

— On appelle *boule fermée* de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B_F\,(x_0, r) \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \|x - x_0\| \leqslant r\right\}.$$

Définition 1.4

On dit qu'une partie $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ est un *ouvert* lorsque

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \exists \eta > 0, \quad B_F\,(x, \eta) \subset \mathcal{U}.$$

Proposition 1.5

- $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts.
- Une union d'ouverts est un ouvert.
- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Proposition 1.6

- Les boules ouvertes sont des ouverts.
- Si $ax + by + c = 0$ est l'équation d'une droite, le demi-plan d'équation

$$ax + by + c > 0$$

  est un ouvert.
- Si on enlève un nombre fini de points à un ouvert, il reste ouvert.

Exercice 1

⇨ Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_O\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$$

n'est pas un ouvert.

Définition 1.7

Soit $\mathcal{U}$ une partie de $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}^2$. On dit que a est *adhérent* à $\mathcal{U}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B_F(a, \varepsilon) \cap \mathcal{U} \neq \varnothing.$$

Exercice 2

⇨ Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$. Montrer que l'ensemble des points adhérents à la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r est la boule fermée de même centre et de même rayon.

Définition 1.8

On appelle *fonction réelle de deux variables* toute fonction définie sur une partie ouverte $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1.2 Limite

Définition 1.9

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{U}$.

- Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ *tend* vers l lorsque x tend vers a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon.$$

- On dit que $f(x)$ *tend* vers $+\infty$ lorsque x tend vers a lorsque

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant m.$$

- On dit que $f(x)$ *tend* vers $-\infty$ lorsque x tend vers a lorsque

$$\forall M \in \mathbb{R}, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M.$$

Remarque

⇨ Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$x \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} x_0, \qquad y \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} y_0 \quad \text{et} \quad \|(x, y)\| \xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y_0)]{} \|(x_0, y_0)\|.$$

Proposition 1.10

Soit f et $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{U}$. On suppose que $f(x)$ tend vers $l_1 \in \mathbb{R}$ et $g(x)$ tend vers $l_2 \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Alors

— Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \lambda l_1 + \mu l_2.$$

— On a

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 l_2.$$

— Si $l_2 \neq 0$, alors il existe une boule de centre a sur laquelle g ne s'annule pas. De plus

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{l_1}{l_2}.$$

Proposition 1.11

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{U}$ et $g : \mathcal{D}_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{D}_g$. On suppose que

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_f \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad g(y) \xrightarrow[y \to l_f]{} l_g \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Alors

$$g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} l_g.$$

Proposition 1.12

Soit f, g et $h : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{U}$.

— On suppose que

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

et que $f(x)$ et $h(x)$ admettent la même limite finie $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

— On suppose qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad |f(x) - l| \leqslant g(x).$$

et que $g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

— On suppose que

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) \leqslant g(x).$$

— Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.
— Si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.

Remarque

⇨ Si il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\varphi(r) \xrightarrow[r \to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \forall r \geqslant 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |f(a_1 + r\cos\theta, a_2 + r\sin\theta) - l| \leqslant \varphi(r)$$

alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$.

Exercice 3

⇨ Soit f la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) \coloneqq \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Montrer que f admet une limite en $(0,0)$.

1.3 Continuité

Définition 1.13

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est *continue* en $x_0 \in \mathcal{U}$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0).$$

Remarques

⇨ On dit qu'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue lorsqu'elle est continue en tout point de $\mathcal{U}$.

⇨ Les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sont continues.

Proposition 1.14

Soit f et $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en $x_0 \in \mathcal{U}$. Alors

— Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0.

— fg est continue en x_0.

— Si $g(x_0) \neq 0$, il existe une boule de centre x_0 sur laquelle g ne s'annule pas et f/g est continue en x_0.

Proposition 1.15

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Si f est continue en $x_0 \in \mathcal{U}$ et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

1.4 Application partielle

Définition 1.16

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $x := (x_1, x_2) \in \mathcal{U}$. On définit les fonctions réelles d'une variable réelle f_{p_1} et f_{p_2} par

$$f_{p_1}(t) := f(t, x_2) \quad \text{et} \quad f_{p_2}(t) := f(x_1, t).$$

f_{p_1} et f_{p_2} sont appelées *applications partielles* de f au point $x = (x_1, x_2)$.

Exercice 4

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \frac{(2-y)\cos(xy)}{1+x^2}.$$

Déterminer les applications partielles de f en $(0,0)$.

Proposition 1.17

— Si $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a := (a_1, a_2)$, $f_{p_1}(t)$ tend vers l lorsque t tend vers a_1 et $f_{p_2}(t)$ tend vers l lorsque t tend vers a_2.

— Si f est continue en $x := (x_1, x_2)$, f_{p_1} est continue en x_1 et f_{p_2} est continue en x_2.

Remarque

⇨ Nous verrons que les réciproques de ces théorèmes sont fausses. Par exemple, f_{p_1} peut être continue en x_1 et f_{p_2} peut être continue en x_2 sans que f soit continue en (x_1, x_2).

Exercice 5

⇨ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

n'a pas de limite en $(0,0)$.

1.5 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition 1.18

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Les fonctions f_1 et $f_2 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x)).$$

sont appelées *fonctions coordonnées* de f.

Remarque

⇨ On étend les notions de limite et de continuité aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ en remplaçant les valeurs absolues par des normes dans les définitions données plus haut. Par exemple, si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}^2$ est un point adhérent à $\mathcal{U}$ et $l \in \mathbb{R}^2$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \|x - a\| \leqslant \eta \Longrightarrow \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 1.19

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

— Si a est un point adhérent à $\mathcal{U}$ et $l := (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ alors $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a si et seulement si

$$f_1(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_1 \quad \text{et} \quad f_2(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_2.$$

— Si $x_0 \in \mathcal{U}$, f est continue en x_0 si et seulement si f_1 et f_2 le sont.

Proposition 1.20

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ avec $p, q, r \in [\![1, 2]\!]$. On suppose que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.

— Soit $a \in \mathbb{R}^p$ un point adhérent à $\mathcal{U}$. Si $f(x)$ tend vers $b \in \mathbb{R}^q$ lorsque x tend vers a et $g(y)$ tend vers l lorsque y tend vers b, alors

$$g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

— Soit $x_0 \in \mathcal{U}$. Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Remarque

⇨ Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à $\mathcal{U}$ en lequel f admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $g : I \to \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, b est une borne de I et $g(t)$ tend vers a lorsque t tend vers b, alors

$$f(g(t)) \xrightarrow[t \to b]{} l.$$

On peut ainsi, en choisissant différentes fonctions g, se faire une idée de la limite éventuelle de f en a, ou prouver que f n'admet pas de limite en a.

Exercices 6

⇨ Soit f la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) := \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Étudier la limite éventuelle de f en $(0, 0)$.

⇨ Soit f la fonction définie sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$ par

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, \quad f(x, y) := x^y.$$

Étudier la limite éventuelle de f en $(0, 0)$.

2 Dérivation

2.1 Dérivée partielle

Définition 2.1

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $x := (x_1, x_2) \in \mathcal{U}$.

— On dit que f admet *une dérivée partielle par rapport à la première variable* en x lorsque

$$\frac{f(x_1 + t, x_2) - f(x_1, x_2)}{t}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers 0. Si tel est le cas, cette limite est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x).$$

— On dit que f admet *une dérivée partielle par rapport à la seconde variable* en x lorsque

$$\frac{f(x_1, x_2 + t) - f(x_1, x_2)}{t}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers 0. Si tel est le cas, cette limite est notée

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

Remarque

⇨ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction admettant des dérivées partielles en tout point par rapport à la première et à la seconde variable, $x := (x_1, x_2)$ et $f_{p_1}, f_{p_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les fonctions partielles définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{p_1}(t) := f(t, x_2) \qquad \text{et} \qquad f_{p_2}(t) := (x_1, t).$$

Alors f_{p_1} et f_{p_2} sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'_{p_1}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_2) \qquad \text{et} \qquad f'_{p_2}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, t).$$

Définition 2.2

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{U}$ et $h \in \mathbb{R}^2$. On dit que f admet une *dérivée en x selon le vecteur h* lorsque

$$\frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers 0. Si tel est le cas, cette limite est notée

$$\mathrm{D}f_x(h).$$

Remarques

⇨ Si $e_1 := (1, 0)$, f admet une dérivée en x selon le vecteur e_1 si et seulement si elle admet une dérivée partielle par rapport à la première variable en x. De plus, si tel est le cas

$$\mathrm{D}f_x(e_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x).$$

De même, f admet une dérivée en x selon le vecteur $e_2 := (0, 1)$ si et seulement si elle est admet une dérivée partielle par rapport à la seconde variable en x.

⇨ Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors f admet une dérivée en tout $x \in \mathcal{U}$ selon le vecteur nul et $\mathrm{D}f_x(0) = 0$. De plus, si f admet une dérivée en x selon le vecteur $h \in \mathbb{R}^2$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, elle admet une dérivée en x selon le vecteur λh et

$$\mathrm{D}f_x(\lambda h) = \lambda \mathrm{D}f_x(h).$$

Exercice 7

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en $(0,0)$ selon tout vecteur mais n'est pas continue en $(0,0)$.

Définition 2.3

On dit qu'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de *classe* $\mathcal{C}^1$ lorsque

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

sont définies et continues sur $\mathcal{U}$.

Remarques

⇨ Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, les applications partielles sont de classe $\mathcal{C}^1$.

⇨ Les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 2.4

Soit f et $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

— Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall i \in [\![1,2]\!], \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i}(x) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

— fg est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall i \in [\![1,2]\!], \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) + f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x).$$

— Si g ne s'annule pas sur $\mathcal{U}$, f/g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall i \in [\![1,2]\!], \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial \left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) g(x) - f(x) \frac{\partial g}{\partial x_i}(x)}{g(x)^2}.$$

Proposition 2.5

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall i \in [\![1,2]\!], \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = g'(f(x)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Exercice 8

⇨ Trouver l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0.$$

⇨ Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + y.$$

2.2 Développement limité, gradient

Définition 2.6

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie en $(0,0)$. On dit que $f(h)$ est *négligeable* devant $\|h\|$ en $(0,0)$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall h \in \mathcal{U}, \quad \|h\| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(h)| \leqslant \varepsilon \|h\| .$$

Si tel est le cas, on note

$$f(h) = \underset{h \to (0,0)}{\mathrm{o}} (\|h\|) .$$

Proposition 2.7

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \in \mathcal{U}$. Alors, en notant $h = (h_1, h_2)$

$$f(x+h) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) h_2 + \underset{h \to (0,0)}{\mathrm{o}} (\|h\|) .$$

Remarque

⇨ Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ alors, le plan d'équation

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

est appelé *plan tangent* en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.

Proposition 2.8

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est continue.

Proposition 2.9

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \in \mathcal{U}$. Alors f admet une dérivée en x selon tout vecteur $h := (h_1, h_2)$ et

$$\mathrm{D}f_x(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) h_2.$$

Autrement dit, $\mathrm{D}f_x$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := \frac{xy}{1 + x^2}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\mathrm{D}f_{(x,y)}(h_1, h_2)$.

Définition 2.10

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $x \in \mathcal{U}$. On appelle *gradient* de f en x l'unique vecteur $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{D}f_x(h) = \langle \nabla f(x) | h \rangle .$$

Autrement dit

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right).$$

Remarques

⇨ Le symbole ∇ est un delta majuscule inversé. Il se prononce « nabla » en référence au nom grec désignant une harpe phénicienne.

⇨ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $u_\theta := (\cos\theta, \sin\theta)$. Alors, d'après Cauchy-Schwarz

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{D}f_x(u_\theta) = \langle \nabla f(x) | u_\theta \rangle \leqslant \|\nabla f(x)\| \, \|u_\theta\| = \|\nabla f(x)\|$$

cette inégalité étant une égalité si et seulement si $\nabla f(x)$ et u_θ sont positivement liés. On en déduit que $\nabla f(x)$ donne la direction dans laquelle f croît le plus vite.

2.3 Dérivation des fonctions composées

Proposition 2.11

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad [\nabla(g \circ f)](x) = g'(f(x)) \nabla f(x).$$

On écrit aussi, de manière abusive

$$\nabla(g \circ f) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}f} \nabla f.$$

Exercice 10

⇨ Calculer ∇f, où f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Proposition 2.12

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathcal{U}, \quad (g \circ f)'(t) &= \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(t)) f_1'(t) + \frac{\partial g}{\partial x_2}(f(t)) f_2'(t) \\ &= \langle \nabla g(f(t)) | f'(t) \rangle \end{aligned}$$

On écrit aussi, de manière abusive

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(g(f_1,f_2))}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}t} \\ &= \left\langle \nabla g \middle| \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} \right\rangle \end{aligned}$$

Exercice 11

⇨ Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) := f\left(t^2, t^3\right).$$

Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $\varphi'(t)$.

Proposition 2.13

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $M : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathcal{U}$. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in I, \quad f(M(t)) = c.$$

Alors, pour tout $t \in I$, $M'(t)$ est orthogonal au gradient de f en $M(t)$.

Remarque

⇨ Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* de hauteur $c \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\mathcal{L}_c := \{(x,y) \in \mathcal{U} \mid f(x,y) = c\}.$$

La proposition précédente nous assure que le gradient de f est orthogonal à ses lignes de niveau.

Proposition 2.14

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $g : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1}(x) = \dfrac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \dfrac{\partial g}{\partial y_2}(f(x)) \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) \\ \dfrac{\partial(g \circ f)}{\partial x_2}(x) = \dfrac{\partial g}{\partial y_1}(f(x)) \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) + \dfrac{\partial g}{\partial y_2}(f(x)) \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{cases}$$

On écrit aussi, de manière abusive

$$\frac{\partial\left(g\left(f_1,f_2\right)\right)}{\partial x_1}=\frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\quad\text{et}\quad\frac{\partial\left(g\left(f_1,f_2\right)\right)}{\partial x_2}=\frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

Exercices 12

⇨ Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la fonction $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad h\left(x,y\right):=f\left(2xy,x\right)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

⇨ Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. On souhaite déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$(E)\quad\forall\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2,\quad a\frac{\partial f}{\partial x}\left(x,y\right)+b\frac{\partial f}{\partial y}\left(x,y\right)=0.$$

1. Montrer que l'application

$$\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2&\longrightarrow&\mathbb{R}^2\\(u,v)&\longmapsto&(au-bv,bu+av)\end{array}$$

est bijective et calculer φ^{-1}.

2. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad g(u,v):=f(au-bv,bu+av).$$

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si

$$\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=0.$$

3. Conclure.

2.4 Extrémum d'une fonction de deux variables

Définition 2.15

Soit $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ et $x_0\in\mathcal{U}$. On dit que

— f présente un *maximum global* en x_0 lorsque

$$\forall x\in\mathcal{U},\quad f(x)\leqslant f\left(x_0\right).$$

— f présente un *maximum local* en x_0 lorsque

$$\exists r>0,\quad\forall x\in\mathcal{U},\quad\|x-x_0\|\leqslant r\Longrightarrow f(x)\leqslant f\left(x_0\right).$$

— f présente un *minimum global* en x_0 lorsque

$$\forall x\in\mathcal{U},\quad f(x)\geqslant f\left(x_0\right).$$

— f présente un *minimum local* en x_0 lorsque

$$\exists r>0,\quad\forall x\in\mathcal{U},\quad\|x-x_0\|\leqslant r\Longrightarrow f(x)\geqslant f\left(x_0\right).$$

Remarques

⇨ Un extrémum global est un extrémum local, la réciproque étant fausse en général.

⇨ Si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ admet un minimum local en $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, alors les fonctions partielles

$$f_{p_1}:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\t&\longmapsto&f(t,x_2)\end{array}\qquad\text{et}\qquad f_{p_2}:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&\mathbb{R}\\t&\longmapsto&f(x_1,t)\end{array}$$

admettent un minimum local, respectivement en x_1 et x_2. Cependant, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=x^2-3xy+y^2.$$

⇨ Plus généralement, si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ admet un minimul local en $x_0\in\mathbb{R}^2$ alors, quel que soit $h\in\mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad\varphi(t):=f(x_0+th)$$

admet un minimum local en 0.

Définition 2.16

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que $x \in \mathcal{U}$ est un point *critique* de f lorsque

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 0.$$

Proposition 2.17

Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$. Si f présente un extrémum local en x_0 alors x_0 est un point critique pour f.

Remarques

- ⇨ Les extrémums locaux d'une fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ sont donc à chercher parmi les points critiques de f.
- ⇨ La réciproque est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \coloneqq x^2 - y^2$$

admet $(0,0)$ pour point critique alors qu'elle ne présente pas d'extrémum local en $(0,0)$.

Exercice 13

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \coloneqq -x^2 - 6xy + 9y^2 + 18x - 18y + 1.$$

Déterminer les extrémums éventuels de f.